Ministerio de Educación
Presidencia de la Nación

Instituto Nacional de Formación Docente

"HACIA UN NUEVO LENGUAJE ALGEBRAICO"

Especialización en Enseñanza de la Matemática y las Ciencias Experimentales. UNSAM. 2009.

JOSE DANIEL MAMANI

Esta tesis fue financiada a través de las acciones correspondientes a la línea de Postgrados y Stages perteneciente a la Coordinación de Desarrollo Profesional Docente del Instituto Nacional de Formación Docente mediante el programa de formación - PROFOR -

INTRODUCCION

Pensar en un trabajo final para la especialización al principio fue un poco complicado, ya que hay diversos temas que tratamos en los seminarios de la especialización que se hacía difícil inclinarse por un tema. Pero luego pensando en lo que uno trabaja, siempre se inclina por un tema en particular, y ese tema seleccionado era tratar la iniciación al estudio del álgebra. Es un tema de actualidad porque hay muchos trabajos realizados sobre el mismo. Para el docente el álgebra representa una de las herramientas principales para trabajar la matemática pero para el alumno no puede llegar a comprender porque usar letras en vez de números.

En el primer capítulo se trata de recorrer la historia de la evolución del álgebra a lo largo de los tiempos. Se describirán en el mismo los grandes períodos que han configurado dicha historia y se destacarán algunos de los muchos personajes que han ayudado a escribir la historia del álgebra, una de las ramas de mayor importancia de las matemáticas como así también la evolución en su enseñanza.

En el segundo capítulo se trata de abarcar el marco teórico en donde se darán a conocer aportes que realizaron tanto pedagogos como matemáticos mismos a la enseñanza de la matemática y también con respecto al algebra.

En el tercer capítulo se analizan algunos libros de texto en cuanto a la presentación del contenido sobre algebra, resulta imprescindible tratarlo tanto en libros de actualidad como en el libro de Repetto Linskens y Fesquet, y a su vez dar un paseo por las diferentes reformas educativas que sufrió nuestro país desde la época de Sarmiento hasta la actualidad y como se enseña algebra hoy en día.

El cuarto capítulo trata de estudiar las nuevas corrientes de la enseñanza aprendizaje del algebra, donde se intenta hacer un conjunto de reflexiones sobre los problemas que existen en la actualidad cuando se trata de iniciar a los alumnos a la enseñanza del álgebra como ser a partir de la

GENERALIZACION y LOS PROYECTOS DEL CALCULO ARITMETICO DE GASCONS. Intenta ser un aporte para aquellos que están interesados en el estudio de dicha rama, que pretende tomar la práctica docente como punto de partida para un análisis con el fin de mejorar dicha práctica.

En el capítulo 5 se presenta el uso de las NTICS como herramienta para la enseñanza de las matemáticas pero sobre todo en el álgebra. En el último capítulo se presentan dos propuestas para iniciar al alumno a trabajar con algebra.

Procura integrar los contenidos abordados en los diferentes seminarios de la especialización y sobre todo recoger los principales problemas de base que plantea la iniciación al lenguaje algebraico, como lo son el simbolismo, la generalización, el pasaje del lenguaje coloquial al simbólico o numérico que representan un obstáculo para la mayor parte del alumnado.

Espero que este trabajo sea útil para cualquier docente cualquiera que sean sus ideas pedagógicas, para que cada docente seleccione las actividades o fragmentos que considere oportuna o pueda elaborar otras, sugeridas por las que aquí se presentan.

> *"El álgebra es el lenguaje de las matemáticas…las matemáticas son, esencialmente, la expresión de ideas complejas y sofisticadas mediante símbolos, y operaciones sobre símbolos y las operaciones aparece el álgebra"*
>
> *D.J. Lewis, 1975*

EVOLUCION DEL ALGEBRA EN EL TIEMPO

La aritmética será la ciencia que se ocupa de los objetos concretos, esto es, de los números. En cambio el Álgebra es, en esencia, la doctrina de las operaciones matemáticas analizadas desde un punto de vista abstracto y genérico, independientemente de los números u objetos concretos.

Los orígenes del álgebra se pueden asociar al concepto de número, que surgió sin duda debido a la necesidad de contar objetos. En un principio, éstos se contaban de forma rudimentaria, utilizando dedos, piedras... (Curiosamente, la palabra cálculo deriva de la palabra latina *calculus,* que remite a contar con piedras). La serie de números naturales era, obviamente, limitada en una primera etapa de recursos muy arcaicos no obstante lo cual, existía una conciencia generalizada sobre la necesidad de ampliar el ámbito de trabajo con dichos números para abarcar un campo mucho mayor.

A continuación se van a describir las distintas etapas que han ido configurando la historia del álgebra, analizando los conocimientos y los avances que se han ido realizando en cada una de ellas.

Comienzos del algebra en la civilización egipcia

La civilización egipcia es la primera en manejar el álgebra con profundidad y rigor matemático. Los egipcios poseían ya un sistema de numeración al que, posteriormente, se asemejaría el sistema de numeración romano. Era de carácter jeroglífico y estaba basado en una serie de números especiales que se denominaban números clave (1, 10, 100, 1000...). Para la representación de los mismos, los egipcios empleaban distintos símbolos como palos, lazos y figuras diversas. La representación del resto de los números la basaban en el uso de estos números clave, y dio como resultado el desarrollo de un álgebra relativamente sencilla, impulsados por la necesidad de resolver problemas de la vida diaria, tales como la repartición de cosechas y materiales.

En lo que respecta a operaciones y cálculo s empleados en la civilización egipcia, cabe destacar que ya se utilizaban operaciones y reglas de cálculo con números enteros positivos, así como con números fraccionarios positivos. Sólo trabajaban con las fracciones como divisores de la unidad, $1/n$, y las usaban para expresar el resto de fracciones, combinándolas entre sí. No obstante, aún se encontraban lejos del conocimiento y manejo de los números negativos.

En un nivel más avanzado, los egipcios fueron capaces de resolver ecuaciones de primer grado por el método que por ellos denominado como “de la falsa posición”. En estas ecuaciones, que podemos considerar primitivas o rudimentarias, la incógnita x recibía el nombre de *montón.*

Civilizaciones babilónicas y mesopotámicas en el algebra

A diferencia del álgebra empleada por los egipcios, el sistema de numeración utilizado por los mesopotámicos era de carácter posicional sexagesimal. El gran avance de esta civilización en materia de números consistió en que un mismo símbolo podía representar distintas cantidades, dependiendo únicamente del lugar o posición en que se colocara.

A diferencia de los egipcios, que no llegaron a resolver más que ecuaciones de primer grado, ya en el siglo XVII a.C., los matemáticos de Mesopotamia y de Babilonia eran capaces de resolver ecuaciones de primer y segundo grado. Incluso, hay constancia de que la resolución de algunos sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas estaba al alcance de sus manos. También es digno de mención el progreso que realizaron los matemáticos babilónicos y mesopotámicos con la potenciación, progreso que les condujo a la resolución de ecuaciones cuadráticas e incluso a la suma de progresiones tanto aritméticas como geométricas. Esta gran labor de avance en matemáticas y, en particular en álgebra, fue posible debido al elevado grado de abstracción que fueron capaces de desarrollar.

Algebra y la Civilización china.

El sistema numérico empleado por los chinos era el decimal jeroglífico. Aunque aún no se habían introducido los números negativos de forma precisa, sí los admitían aunque no los aceptaban como soluciones de ecuaciones.

Sin embargo su contribución algebraica de mayor importancia fue en relación a los sistemas de ecuaciones lineales. Desarrollaron un sistema de resolución de ecuaciones lineales de carácter genérico que tenía cierta similitud con el que siglos más tarde desarrollaría Gauss.

Se atribuye a ellos alrededor del siglo I d.C. la invención de una especie de ábaco primitivo, (*suanzí*), que consistía en un conjunto de palos de bambú de dos colores asociados a números positivos y negativos respectivamente. Dicho instrumento recibió el nombre de *tablero de cálculo.*

Entre las innovaciones de la civilización china hay que destacar que desarrollaron métodos que permitían obtener raíces racionales además de las enteras obtenidas hasta entonces.

El algebra y la Civilización helénica.

Una característica importante de los griegos es su interés por tratar de precisar todas las operaciones y de justificar de forma rigurosa todas las leyes relativas al álgebra, interés que no se había despertado en civilizaciones anteriores.

En la época de Pitágoras (siglo VI a. C.) se llevó a cabo una recopilación y una fusión de muchos resultados matemáticos y la unión de los mismos dio lugar a nuevos sistemas teóricos. Se estudiaban en aquella época propiedades numéricas, divisibilidad de números, cuestiones sobre proporciones aritméticas, geométricas y armónicas y diferentes medias (aritmética, geométrica y armónica).

Se estudiaron también las conocidas ternas pitagóricas, es decir, ternas de números que satisface la ecuación $a^2+b^2=c^2$ y se descubrió un método para el hallazgo de dichas ternas.

Otro gran descubrimiento de los griegos fue la existencia de la irracionalidad llevando a cabo, por ejemplo y mediante reducción al absurdo, la comprobación de la irracionalidad de raíz de 2 . A partir de este descubrimiento surgió la necesidad de crear una teoría más amplia que comprendiera tanto los números racionales como los irracionales.

Esto dio lugar a una reestructuración de la geometría que desembocó en el álgebra geométrica. Sin embargo, esta álgebra geométrica no era capaz de resolver problemas de dimensión mayor que dos lo que hacía imposible resolver problemas que conllevaban la resolución de ecuaciones de tercer grado o superiores.

Destaca la figura del matemático griego Nicómaco de Gerasa, en el siglo II D.C. quién publicó su “Introducción a la Aritmética” exponiendo varias reglas para el buen uso de los números.

A pesar de que las ecuaciones de primer y segundo grado ya se habían resuelto varios siglos antes, no fue hasta el siglo III d. C. cuando Diofanto, en su obra “Aritmética”, las estudia en profundidad y de forma rigurosa. Además encontró solución a más de 50 clases diferentes de ecuaciones llamadas ecuaciones diofánticas. Designó las incógnitas con un signo que se correspondía con la primera sílaba de la palabra griega *arithmos*, que significa número. Toda su obra y los problemas que planteó sentaron las bases de lo que posteriormente sería el álgebra moderna a pesar de que su labor carecía de precisión y era algo rudimentaria.

Por lo tanto, se considera la época griega como un período donde se trataron las matemáticas de una forma muy amplia y se tocaron ya algunos de los elementos que posteriormente, y muchos siglos después, sentarían las nuevas ramas de las matemáticas.

El Algebra en la Civilización hindú.

La civilización india usó un sistema de numeración posicional y decimal desde el siglo VIII a.C., época a la que pertenecen los primeros hallazgos de este pueblo. A pesar de que ya por entonces habían desarrollado en cierta medida el álgebra, es durante los siglos V- XII donde todos sus avances y logros alcanzan su mayor apogeo.

Dentro de sus avances se incluye la introducción del cero y las operaciones con números irracionales. Tuvo gran importancia el correcto uso de los números negativos ya que en el siglo VII los hindúes habían desarrollado las reglas algebraicas fundamentales para manejar números positivos y negativos. Aceptaban los números negativos como soluciones de ecuaciones y las interpretaban como deudas.

En este progreso significativo que legaron los hindúes destacan grandes figuras matemáticas como Aryabhata (s.VI), Brahmagupta (s.VI), Mahavira (s. IX) y Bhaskara Akaria (s.XII). A continuación vamos a repasar la biografía de algunos de estos personajes debido a la trascendencia que tuvieron:

Brahmagupta nació en el 598 d. C. y murió en el 665 d. C. Dentro de sus logros cabe mencionar la generalización de la fórmula de Herón para calcular el área de un triángulo $K=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$. Acepta los dos signos posibles de las raíces cuadradas y es capaz de resolver ecuaciones diofánticas lineales de la forma $ax+by=c$, con a, b y c enteros.

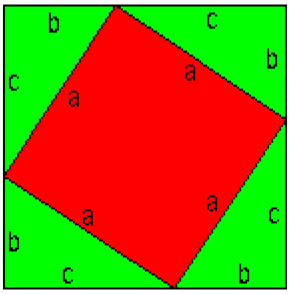
Descubrió que para que una ecuación de este tipo tuviera solución c debía ser divisible por el máximo común divisor de a y b. Más aún, en el caso de ecuaciones donde a y b fuesen primos entre sí llegó a comprobar que las soluciones eran de la forma fórmulas $x=p+mb$ y $y=q-ma$, donde m es un entero arbitrario.

Bhaskara nació en el año 1114 y murió en el año 1185. De los citados matemáticos hindúes fue el último de ellos y su labor es de un gran valor. Una de sus obras más conocidas es "Vijaganita" y en ella destaca el descubrimiento que hizo Bhaskara del doble signo de los radicales cuadráticos.

También se incluye en este libro el intento de resolver las divisiones por cero. Bhaskara se empeñó en este propósito ya que en los matemáticos indios se despertó un gran interés por las cantidades muy grandes.

El segundo libro más reconocido de su obra es el "Lilavati". En él se trabaja y resuelven ecuaciones lineales y cuadráticas. Encuentra una solución al Teorema de Pitágoras. Entre los problemas geométricos da una resolución del teorema de Pitágoras:

Teniendo en cuenta el cuadrado de una suma, $(b+c)^2=b^2+c^2+2bc$ y observado la figura $(b+c)^2=2bc+a^2$ y por tanto se obtiene $a^2=b^2+c^2$.



También fue capaz de aproximar el número pi y dio algunas aproximaciones como 22/7 y 3927/1250.

La civilización musulmana y el algebra

El mayor representante de la cultura musulmana fue matemático y astrónomo Al-Khowarizmi que perteneció a una de las más importantes escuelas que se extendían por todo el Imperio. Una de sus obras más conocidas está basada en la obra de Brahmagupta que tradujo al árabe. Un detalle curioso referente a este libro fue que en él se incluyó una copia fiel del sistema de numeración hindú lo que ha llevado a un gran error y es que hoy en día muchos creen que nuestro sistema de numeración proviene del árabe debido a esta traducción que llevó a cabo Al-Khowarizmi. Su obra más importante lleva por nombre “Hisab al-jabr wa-al-muqabala”, nombre del que posteriormente ha derivado el término álgebra.

La obra de Al-Khowarizmi fue seguida en el siglo X por el también musulmán Abu Kamil, cuyos avances en el álgebra serían aprovechados en el siglo XIII por el matemático italiano Fibonacci. Otro matemático musulmán a tener en cuenta fue Casi cuyo mérito se debió a haber encontrado las primeras 17 cifras del número pi en el siglo XV. Grandes matemáticos posteriores intentaron tal hazaña pero fracasaron en el intento (Viète sólo fue capaz de encontrar las 9 primeras cifras en 1593) Sólo a finales del siglo XVI se repite el logro de Casi. Los trabajos de los matemáticos árabes que se extienden desde el siglo IX hasta el siglo XV incluyen ecuaciones de primer y segundo grado. Además, algunos problemas de carácter geométrico como la división de la esfera por un plano o la trisección de un ángulo llevaron a plantear ecuaciones cúbicas

El álgebra en el continente europeo.

El Algebra en la Edad Media

En Europa la historia es bastante diferente a la evolución que ésta tuvo en Oriente. Fue en la Edad Media cuando empezaron a surgir centros de enseñanza como el que organizó Gerberto en el siglo X en Reims (Francia). En ellos comenzaron a difundirse todos los conocimientos indo-arábigos gracias a que los musulmanes tradujeron toda la obra hasta la época rompiendo así la barrera lingüística. Uno de los musulmanes a destacar fue Gerardo Cremona (siglo XII).

Otra gran figura digna de mencionar es Leonardo de Pisa que ha pasado a la historia como Fibonacci. Su importancia se debe a que aprendió el sistema de numeración indo-arábigo tras viajes realizados al norte de África y a Oriente. Su obra más conocida recibe el nombre de “Liber Abaci” que significa Tratado del ábaco y que escribió alrededor de 1212. Es una obra muy completa donde se recogen entre otras operaciones con fracciones, la regla de tres simple y compue sta, la división proporcional y la sucesión por la que este personaje ha pasado a la historia y que lleva su nombre, la sucesión de Fibonacci.

El Algebra en el Siglo XVI

En el siglo XIV se produjo un avance relativo a las potencias ya que se comenzó a calcular potencias de exponentes fraccionarios y se establecieron de forma rigurosa las reglas para operar con ellas. La figura encargada de esto fue Nicole Orestes.

Estos avances en el cálculo de potencias y la progresiva expansión del álgebra de Oriente en Europa fueron los hechos más notables de carácter matemático que tuvieron lugar durante la Edad Media.

Sin embargo, a pesar de este pequeño aletargamiento, resurge el álgebra de forma descomunal en el siglo XVI. Es la época del Renacimiento que en matemáticas se refleja en la escuela Italiana donde las matemáticas, y en concreto el álgebra, reciben un gran impulso. En este siglo destaca el interés en la búsqueda de una solución a las ecuaciones de tercer y cuarto grado. Hay varios nombres de italianos conocidos que han configurado la historia de esta búsqueda. Pocas veces, cuando se enseñan en las escuelas los conocimientos de las distintas áreas, se tiene en cuenta la dificultad y los problemas para llegar a tales hallazgos así como la parte humana de ese quehacer. En la historia de las ecuaciones de tercer y cuarto grado han contribuído tres personajes y una serie de eventos interesantes y no está exactamente claro como fue el transcurso de este descubrimiento que en algunas ocasiones ha estado confuso. Hay un par de versiones que circulan y voy a tratar de comentar las dos para que los lectores decidan cuál de ellos les parece más real. Los personajes que intervinieron en esta curiosa historia fueron Scipion del Ferro, Fiore, Tartaglia y Cardano. Vamos a repasar las sus historias:

El primer personaje que aparece en esta historia es Scipion del Ferro (1465-1526). Trabajó en la Universidad de Bolonia y fue allí donde descubrió una fórmula para resolver a las ecuaciones de tercer grado en las que faltaba el término cuadrático, conocida como cúbica reducida. Sin embargo decidió no hacerla pública. El motivo era que en aquella época era muy común que los distintos académicos se retaran públicamente entre ellos con problemas de distinta dificultas y el éxito en dichos retos era lo que garantizaba la permanencia de estos académicos en la universidad por lo que encontrarse en posesión de un arma tan valiosa como la que había encontrado era motivo suficiente para guardar el secreto en espera de un próximo reto. Así se garantizaba el triunfo con cualquiera de sus rivales. Sin embargo, justo antes de morir Scipion decidió transmitir su gran descubrimiento a uno de sus alumnos que era Antonio Fior, para que su secreto no pereciera con él. El problema era que este alumno no se caracterizaba por el talento y la genialidad de su maestro e hizo uso de su arma pararetar públicamente a un conocido académico de Brescia, Niccolo Fonmtana (1499-1557).

Niccolo Fontana sufrió, cuando era niño, en 1512, una herida en la cara, por un golpe de espada en la mandíbula, en uno de los muchos conflictos que hubo en Italia a manos de por Gastón de Foix en Brescia, su ciudad natal. Dicha herida le dejó secuelas de carácter estético y más aún pues a raíz de este altercado sufrió un receso en el habla y tuvo dificultades para hablar. Es por este motivo por lo que recibió el apodo de Tartaglia por el que posteriormente fue conocido y que significa tartamudo. Tartaglia era por entonces un matemático de familia pobre que se ganaba la vida dando clases de matemáticas en el norte de Italia. Explicó esta ciencia sucesivamente en Verona, Vicenza, Brescia y finalmente Venecia, ciudad en la que falleció en 1557 siendo tan pobre como lo fue a lo largo de toda su vida. Según cuenta la historia Tartaglia tenía un profesor que le enseñó medio alfabeto y no pudo enseñarle más porque su familia se quedó sin dinero. A partir de ahí su aprendizaje fue completamente autodidacta. El reto de Fior consistía en resolver 30 problemas de ecuaciones de tipo cúbica reducida. Cuando Tartaglia fue retado dedicó todos sus esfuerzos a resolver estos problemas y, finalmente, el 12 de Octubre de 1535 ganó el reto afirmando que había descubierto la solución de la ecuación cúbica con término lineal. Por el contrario, Fior perdió todo su prestigio y desapareció de los escenarios académicos. Es aquí donde interviene el siguiente personaje de esta historia.

Girolamo Cardano (1501-1576) nacido en Pavía y muerto en Roma. Era un hombre culto, científico y bizarro aunque un tanto extraño. Era médico y conocía, aunque de forma intuitiva, el fenómeno de la alergia. Su vida estuvo llena de anécdotas y una de ellas es la siguiente: era un hijo ilegítimo y su madre intentó en repetidas ocasionas abortar sin éxito. Finalmente y gracias a un baño en vino tibio nada más nacer, logró sobrevivir. Esta curiosidad fue incluida por el propio Cardano en su autobiografía.

También hay que mencionar que pasó varias temporadas en la cárcel debido a sus trampas y pillerías. Es más, hay una leyenda que mantiene que mediante la astrología predijo el día de su muerte y que no tuvo más remedio que cometer suicidio para que su predicción fuese cierta.

Según cuenta la historia, Cardano era muy ambicioso y cuando llegó a sus oídos que Tartaglia había descubierto la solución a la ecuación cúbica reducida trató de obtener la fórmula. Hubo un acercamiento progresivo tras conocerse y continuaron manteniendo contacto entre ellos. Cardano intentó sonsacar a Tartaglia para que este le revelara la fórmula y aunque este se negó repetidas veces en 1539 se la reveló aunque lo hizo de forma cifrada. Además hicieron un juramento y Cardano se comprometió a guardar dicha fórmula en secreto y no publicarla jamás.

A partir de aquí es donde la historia parece tener dos versiones distintas. En una de ellas se ofrece una imagen cruel y egoísta de Cardano que una vez enterado de la fórmula se apropió de ella, rompiendo el juramento con Tartaglia, y la público en su obra “Ars Magna” atribuyéndose el mérito de dicho logro. Este plagio fue un duro golpe para Tartaglia que protestó con vehemencia aunque no pudo conseguir nada. Finalmente aparece en la historia Ludovico Ferrari que fue capaz de encontrar la solución de la ecuación de cuarto grado.

El Algebra en los Siglos XVI-XVII

Otro personaje importante de la historia del álgebra fue François Viète (1540-1603). Su gran labor se debe a que estableció un lenguaje simbólico de carácter algebraico que le permitió escribir de forma clara y precisa todas las ecuaciones así como sus propiedades usando fórmulas generales.

Esta notación es, salvo pequeños cambios, la que se emplea hoy día. Estableció, además, una fuerte relación entre el álgebra y la trigonometría y es considerado por muchos como el padre del álgebra lineal.

Ya en pleno siglo XVII aparece la figura de **René Descartes** (1596-1650). Nación en La Haya y recibió una educación bastante sólida en el colegio de La Flèche (1606-1614).

Cuando salió del colegio a los 18 años ingresó en la universidad de Poitiers para estudiar Derecho y algo de medicina. Se alistó unos meses en el ejército aunque no participó en ningún altercado bélico importante. Se cree que más bien lo hizo para viajar y conocer mundo. En 1619 conoció a Isaac Beeckman en Breda. Esto despertó en Descartes un enorme interés por las matemáticas y la física.

Hubo dos grandes revoluciones que marcaron sus trabajos. La primera de ellas fue que simplificó la notación algebraica y la segunda fue la creación de la geometría analítica.

Al igual que Viéte tiene una gran relevancia en el álgebra por su dedicación a la notación. Fue él quien optó por designar a las constantes con las primeras letras del alfabeto (a, b, c..) y a las incógnitas con las últimas letras del alfabeto (…x, y, z). La notación exponencial que empleamos actualmente fue también ideada por Descartes.

En la parte de su conocida obre “Discurso del Método” llamada "Géometrie" recoge una teoría general sobre ecuaciones e incluye un método para resolver ecuaciones cuadráticas a partir de procesos geométricos y llega a la conclusión de que el número de soluciones de una ecuación coincide con el grado de la misma, resultado que no fue capaz de probar. En toda la "Géometrie" destaca una interrelación entre el álgebra y la geometría lo que desembocó en 1637 con la fusión del álgebra con la geometría dando lugar a la geometría analítica.

Otra de sus grandes aportaciones fue la creación del sistema de coordenadas cartesianas lo que permitió posteriormente al Isaac Newton y a Gottfried Leibnitz el desarrollo del cálculo diferencial e integral. Descartes fue capaz de explicar distintos fenómenos de tipo magnético, óptico, en astronomía, en fisiología orgánica…Por lo tanto fue el precursor del determinismo físico y biológico.

Antes de comenzar el siglo XVIII hay que destacar a dos matemáticos. Fermat (1601-1665) se desligó en cierta medida de las ecuaciones algebraicas que mantenían ocupados a la mayoría de matemáticos y es conocido por el progreso y el impulso que le dio a la teoría de números por el resultado por el que es más conocido “El último teorema de Fermat” cuyo enunciado es el siguiente: “Si n es un entero mayor o igual que 3, entonces no existen números enteros x, y y z (excepto la solución trivial: $x = 0, y = 0, z = 0$) tales que cumplan la igualdad: $z^n = x^n + y^n$

Antes de terminar el siglo hubo otro resultado relevante y fue la formulación del principio de inducción matemática a manos de Pascal en el año 1665

El algebra en el Siglo XVIII

Ya en **el siglo XVIII** los métodos del cálculo aritmético se enriquecieron con la aparición de los logaritmos.

La independencia de álgebra y geometría (en contra de las ideas de Descartes) continuó determinándose ya a comienzos de siglo, cuando en 1707 vio la luz la "Aritmética Universal" de Newton. En ella el álgebra se exponía en estrecha relación con el desarrollo de los métodos de cálculo, relegando las cuestiones geométricas al dominio de las aplicaciones. La esencia de la obra consiste en reducir cualquier problema a la formación de una ecuación algebraica, cuya raíz es la solución del problema. Culmina el libro con los resultados de la teoría general de ecuaciones y además la resolución gráfica de éstas, mediante la construcción geométrica de las raíces. Este famoso tratado contiene las fórmulas, para las sumas de las potencias de las raíces de una ecuación algebraica, fórmulas conocidas habitualmente como "identidades de Newton". Aparece también un teorema que permite determinar el número de raíces reales de un polinomio, así como una regla para determinar una cota superior de las raíces positivas.

Después de la Aritmética Universal de Newton, surgieron una serie de monografías, especialmente centradas en los procedimientos de resolución numérica de ecuaciones, elaboradas por Halley, Lagrange, Fourier y Maclaurin entre otros.

En 1768 apareció la "Aritmética Universal" de Euler, dictada por éste cuando ya estaba ciego. En ella se analizan un sin fin de resultados: se generalizan las reglas de resolución de problemas aritméticos; se desarrolla el aparato simbólico-literal del álgebra; se aclaran las operaciones con números, monomios, radicales y complejos; se introducen los logaritmos; se dan las reglas de extracción de las raíces de números y de expresiones algebraicas polinomiales; se introducen las serie como medio de expresión de las funciones racionales fraccionarias y binomiales con exponentes fraccionarios y negativos de una potencia; se introducen los números poligonales, las proporciones y progresiones, las fracciones decimales periódicas y se estudian los métodos de resolución de ecuaciones algebraicas.

Así, en esencia, el álgebra se convirtió en la ciencia sobre las ecuaciones algebraicas. En ella se incluía además, la elaboración del aparato simbólico-literal necesario para la resolución de tales ecuaciones.

También se profundizó en el concepto de número, produciéndose de una manera definitiva la admisión de los números irracionales. Igualmente se profundizó en las reglas de operaciones con números imaginarios y complejos, pero siempre bajo la premisa de la obtención de raíces de ecuaciones.

Fue también Euler quien se ocupó de una manera definitiva de lo que hoy en día conocemos como teoría de números. Comenzó estudiando los teoremas de Fermat, para desarrollar a continuación todos los aspectos de esta teoría, preferentemente utilizando métodos aritméticos y algebraicos, rehuyendo en la medida de lo posible del análisis infinitesimal. A él debemos la actual teoría de congruencias, a la que llegó tras extensos trabajos sobre la divisibilidad y tras introducir el concepto de raíz primitiva según el módulo m.

No de menor importancia que la teoría de congruencias fueron sus trabajos sobre problemas de análisis diofántico, para cuyas necesidades elaboró y fundamentó la teoría de las fracciones continuas. Asimismo elaboró los métodos analíticos para la resolución de problema de la distribución de números primos, en la serie de los números naturales y también para una serie de problemas aditivos. El primero de estos problemas fue tratado también por Legendre y Chebyshev. Para el segundo de los problemas, donde se estudia el desarrollo de los números grandes en sumandos menores, cabe destacar junto a Euler los nombres de Waring y Lagrange.

La teoría de números en el siglo XVIII, se convirtió pues, en una rama independiente, sintetizada en los trabajos de Euler, Lagrange, Legendre y Lambert entre otros, definiéndose prácticamente los principales problemas y direcciones.

El Algebra en el Siglo XIX

El siglo XIX merece ser llamado más que ningún otro periodo anterior la edad de Oro de la Matemática. El siglo XIX tiene una gran importancia en la evolución del álgebra. A partir de aquí el álgebra evoluciona de forma diferente y aparece un álgebra de carácter más abstracta donde surgen, además, objetos desconocidos hasta entonces pero que captan el interés de los matemáticos del momento como son los grupos, las matrices o los hipercomplejos. Además, el interés en torno al cual giraban las matemáticas también es distinto. Mientras que en el álgebra anterior el principal era la resolución de ecuaciones numéricas, aquí se centra en el estudio de las estructuras algebraicas.

Todo esto da lugar a lo que hoy en día se conoce como álgebra moderna. Debido a la productividad de esta época por los trabajos y resultados que se obtuvieron es conocido el siglo XIX como la edad de Oro de las matemáticas.

Las particularidades del nuevo periodo se manifiestan ya nada más comenzar el siglo. En álgebra hay que tener en cuenta los trabajos de Abel y Galois sobre la resolución de ecuaciones algebraicas en radicales. Ellos promovieron a un primer lugar en el álgebra una serie de conceptos generales muy abstractos, entre los cuales merece el primer lugar el concepto de grupo, dando lugar al nacimiento del Álgebra moderna.

El álgebra moderna es un campo extraordinariamente amplio y ramificado en el que se recogen un gran número de disciplinas científicas e independientes cuyo objeto común son las operaciones algebraicas, las cuales representan abstracciones lejanas de las operaciones del álgebra elemental. Estudiemos de una manera más detallada estas disciplinas.

Teoría General de las Ecuaciones algebraicas

Este fue el problema fundamental del álgebra durante el siglo XIX, entendiéndose como la búsqueda de las raíces de la ecuación con ayuda de operaciones racionales y la operación de la extracción de la raíz.

En esta época se introdujeron una serie de conceptos, entre ellos el concepto de grupo, que yacen en la base del álgebra moderna. Tengamos en cuenta los trabajos de K.F. Gauss, N.H. Abel y E. Galois, relativos a la demostración de la no resolubilidad en radicales de las ecuaciones de grado mayor que cinco y la creación de la teoría de Galois.

Karl Friedrich Gauss hizo sus primeros descubrimientos en álgebra siendo muy joven, advirtiendo ya en 1796 la relación entre la búsqueda de raíces de la ecuación $x^n-1=0$ y la división de la circunferencia en partes iguales. Tres años más tarde demostraba el teorema fundamental del álgebra, dando en 1815, 1816 y 1849 tres nuevas demostraciones.

Recordemos que la primera formulación de este teorema, sin demostrar, fue la dada por Descartes para la demostración de este teorema necesitó construir los campos de desarrollo de los polinomios.

Otro de los notables descubrimientos algebraicos de comienzo de siglo es la demostración de la irresolubilidad en radicales de las ecuaciones de quinto grado. Por este camino llevó P. Ruffini sus investigaciones a finales del siglo XVIII, pero el primer éxito real lo obtuvo Niels Henrik Abel. Tras esto, Abel realizó investigaciones fundamentales en el campo de la teoría de funciones analíticas, e investigó una serie de funciones especiales como las elípticas e hiperbólicas. Pero Abel no pudo dar un criterio general de resolubilidad en radicales de las ecuaciones con coeficientes numéricos.

Sin embargo, la solución a este problema no se hizo esperar largamente y se debe a Evaristo Galois. El objeto fundamental de sus investigaciones fue el determinar cuando son resolubles mediante radicales las ecuaciones polinómicas.

El aparato algebraico introducido tuvo, sin embargo, una significación que salía de los marcos del problema indicado. Su idea del estudio de la estructura de los campos algebraicos y la comparación con ellos de la estructura de los grupos de un número finito de sustituciones, fue la base fructífera del álgebra moderna. la teoría actual de Galois, se ha convertido en una disciplina matemática compleja y ramificada, que incluye un amplio material sobre las relaciones entre las propiedades de las ecuaciones, los números algebraicos y los grupos

Teoría de Grupos.

Galois y Ruffini introdujeron de forma independiente el concepto de grupo. En la primera mitad del siglo XIX, los resultados de la teoría de grupo jugaron un papel auxiliar, especialmente en la teoría de las ecuaciones algebraicas, formándose, predominantemente, la teoría de los grupos finitos.

Posteriormente, ya en los años 50, en trabajos de Cayley y otros, comenzaron a aparecer definiciones abstractas más generales de grupo este proceso se aceleró desde el año 1870 con los trabajos de C. Jordan, quien hizo un resumen de los resultados de la teoría de grupos finitos en su aplicación a la teoría de números, teoría de funciones y geometría algebraica.

A finales de siglo, aparecieron las primeras aplicaciones de la teoría de grupo, resolviéndose, por ejemplo, el problema de la clasificación de todas las redes cristalinas espaciales gracias a los trabajos de E.S Fiedorov. Los grupos discretos finitos, a los que pertenecen los grupos de Fiedorov, obtuvieron extensión en la teoría de los espacios multidimensionales en relación con la teoría de los poliedros regulares en éstos.

Posteriormente se planteó la investigación de los grupos infinitos, tanto discretos como continuos y también sobre la creación de un aparato de cálculo adaptado a las necesidades de la teoría de grupo. los logros fundamentales sobre estas cuestiones pertenecen a los discípulos de C. Jordan, F. Klein y S. Lie.

En la confluencia de los siglos XIX y XX la teoría de grupos se ramificó desmesuradamente, formando el núcleo del álgebra actual. Ella se compone de una serie de teorías altamente desarrolladas: los grupos finitos, los grupos discretos infinitos, los grupos continuos, entre ellos los grupos de Lie. Los métodos teóricos de grupos penetraron en una serie de disciplinas matemáticas y sus aplicaciones. Los descubrimientos de De Broglie, Schrödinger, Dirac y otros, en la mecánica cuántica y en la teoría de la estructura de la materia mostraron que la física moderna debe apoyarse en la teoría de los grupos continuos, en particular en la teoría de la representación de grupos por operadores lineales, la teoría de los caracteres y otras elaboradas por Cartan, H. Weyl y otros científicos.

Pasó medio siglo desde los trabajos de Gauss, Abel y Galois y el centro de gravedad en las investigaciones algebraicas se trasladó a la teoría de grupos, subgrupos, anillos, estructuras. En al álgebra comenzó el periodo de las matemáticas modernas.

Orígenes del Álgebra Lineal

Esta teoría surge de los sistemas de ecuaciones lineales y está directamente relacionada con la teoría de los determinantes y matrices. Se realizan gran cantidad de investigaciones en torno a la noción de invariante de las ecuaciones que tuvo una especial acogida en distintos campos como el Análisis, Geometría, Mecánica y Física.

La historia del álgebra del siglo XIX quedaría incompleta si no atendiésemos a la formación del álgebra lineal, surgida de la teoría de los sistemas de ecuaciones lineales y relacionadas con la teoría de determinantes y matrices. Durante la segunda mitad de siglo se realizaron investigaciones muy importantes de la teoría de los invariantes de las ecuaciones. En este camino del desarrollo, creció la teoría de las formas que encontró aplicación además de en el álgebra, en la teoría de números, la geometría diferencial, la geometría algebraica y la mecánica.

Teorías de Número Real y Teoría de Conjuntos:

En el año 1872 surgieron una serie de trabajos, escritos por G. Cantor, R. Dedekind, K. Weierstrass, E. Heine y Ch. Meray cuyo único objetivo era el de dotar de una teoría rigurosa al número real, problema éste considerado vital para una correcta fundamentación del análisis.

Así Dedekind definió el número real como una cortadura en el conjunto de los números racionales, dando al conjunto de los números reales una interpretación geométrica en forma de línea recta.

Cantor, por su parte, identificó al número real con una sucesión convergente de números racionales.

La creación de la teoría de conjuntos infinitos y los números transfinitos pertenece también a G. Cantor. Él demostró la no equivalencia de los conjuntos de números racionales y reales. Durante los años 1879 a 1884 elaboró de forma sistemática la teoría de conjuntos, introduciendo el concepto de potencia de un conjunto, el concepto de punto límite, de conjunto derivado... La teoría general de las potencias de conjuntos, las transformaciones y operaciones sobre conjuntos y las propiedades de los conjuntos ordenados constituyeron fundamentalmente la teoría abstracta de conjuntos.

Las cuestiones de fundamentación de la teoría de conjuntos, junto con la investigación de los límites de su aplicación se convirtieron durante el siglo XX en una ciencia especial, la "lógica matemática", la cual forma una parte importante de los fundamentos de las matemáticas modernas.

HACIA UNA TEORIZACIÓN EN LA ENSEÑANZA DEL ALGEBRA

En este capítulo intentaremos dar a conocer las diferentes concepciones sobre la didáctica en matemática pero en particular sobre la enseñanza del algebra.

En primer lugar me voy a referir a la resolución de problemas, que es inevitable que no se trate en este trabajo. Hoy en día hacer matemática es resolver problemas. Existen diversos paradigmas sobre la resolución de problemas:

PARADIGMAS EN LA RESOLUCION DE PROBLEMAS

Según Joseph Gascons en un artículo plantea sobre este tema, *“la función que se asigne a la resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas, depende, por una parte, del modelo epistemológico implícito que sostiene la noción de problema de matemática y, por otra, de lo que en cada caso se crea que significa 'enseñar' y 'aprender matemática'”*.

Gascons a continuación identifica ciertas formas ideales que denomina **paradigmas**, y aclara que no pretende realizar una historia del papel que ha jugado la resolución de problemas en los últimos años de la enseñanza de la matemática, si bien podrán identificarse algunas de las formas más usuales de pensar la resolución de problemas.

PARADIGMA TEORICISTA

Afirma Gascons que este paradigma pone el acento en los *conocimientos acabados y cristalizados en ‘teorías’ considerando la resolución de problemas como un aspecto secundario dentro del proceso didáctico global*.

En este paradigma, los problemas tienden a ser trivializados y descompuestos en ejercicios rutinarios, y en particular se ignoran las tareas dirigidas a elaborar estrategias de resolución de problemas. **Por ejemplo, ubican en este caso aquellos problemas de preguntas múltiples, cuyas respuestas van construyendo la resolución del problema, dando las consignas intermedias y los recursos a usar para resolver cada una de esas pequeñas consignas**. Son problemas –según este autor- cuya función principal es aplicar las teorías, ejemplificar o justificar algunos conceptos teóricos, pero son considerados en general como funciones didácticas, es decir que no son constitutivas del conocimiento matemático. La principal característica de este paradigma es que ***ignora absolutamente los procesos de la actividad matemática como tal y,*** *en consecuencia, no concede ninguna importancia –epistemológica ni didáctica– a la génesis y al desarrollo de los conocimientos matemáticos*.

EL PARADIGMA TECNICISTA.

Este paradigma se caracteriza por asignarle muy poca importancia al dominio de las técnicas matemáticas. No puede imaginar que los alumnos puedan desarrollar por sí mismos ciertas técnicas y convierte a este aprendizaje en uno algorítmico. Como dice Gascón: *"este punto de vista puede provocar una catástrofe didáctica que es muy visible cuando afecta a los niveles más básicos de la enseñanza de la matemática. En la enseñanza primaria, en efecto, el menosprecio del dominio de las técnicas puede provocar un 'vacío' del contenido de la enseñanza hasta el punto de que al final los alumnos no puedan mostrar ningún aprendizaje efectivo, ni siquiera el dominio de las operaciones aritméticas básicas"*. Esto justificaría, según el autor, *"el surgimiento del paradigma que enfatiza los aspectos más rudimentarios del momento de la técnica y concentra en ellos los mayores esfuerzos"*.

Los paradigmas mencionados tienen una misma concepción psicologista ingenua del proceso didáctico, continúa el autor, que tiene en el conductismo su referencia más clara y que *"considera al alumno como una caja vacía que debe llenarse a lo largo de un proceso gradual que parte de los conceptos lógicamente más simples hasta llegar, paso a paso, a los sistemas conceptuales más complejos, o bien como un autómata que mejora el dominio de las técnicas mediante la simple repetición"*.

EL PARADIGMA MODERNISTA.

Los efectos extremos de los paradigmas anteriores, pueden provocar la necesidad de rescatar la actividad de resolución de problemas en sí misma, ignorada por los paradigmas anteriores y tomarla como eje central. El paradigma modernista *"tiende a identificar la actividad matemática con la exploración de problemas no triviales"*, es decir se presentan problemas que aún no se saben resolver, se prueba con distintas técnicas o métodos, para comprobar adónde se puede llegar, se buscan problemas semejantes, etc. La idea es que los alumnos puedan tomar posesión de la situación planteada y empezar a hacer ensayos, conjeturas, proyectos de resolución y contraejemplos, que constituyen tareas típicas de la actividad exploratoria de resolución de problemas.

Gascón afirma que aunque el paradigma modernista pretende superar al conductismo clásico, *"coloca en su lugar una especie de "activismo" que no deja de constituir otra modalidad de psicologismo ingenuo fundamentada, en este caso, en una interpretación muy superficial de la psicología genética"*.

EL PARADIGMA *CONSTRUCTIVISTA*

El cuarto paradigma pretende introducir la resolución de problemas con el objetivo de que los alumnos puedan "construir" nuevos conocimientos. El autor retoma la caracterización que hace **Douady (1986)** de una "situación problema":

- *El alumno ha de poder introducirse en la resolución del problema y ha de poder considerar lo que es una solución posible.*
- *Los conocimientos del alumno han de ser, en principio, insuficientes para resolver el problema.*
- *La "situación problema" ha de permitir al alumno decidir si una solución determinada es correcta o no.*
- *El conocimiento que se desea que el alumno adquiera ("construya") ha de ser la herramienta más adecuada para resolver el problema al nivel de conocimientos del alumno.*
- *El problema se ha de poder formular en diferentes "cuadros" (por ejemplo, cuadros físico, geométrico, algebraico) entre los que han de poderse establecer correspondencias.*

El avance que constituye este paradigma con respecto a los demás es que integra el momento exploratorio con el momento teórico, dando gran importancia al papel de la actividad de resolución de problemas en la génesis de los conceptos.

Pretendemos que los alumnos aprendan matemática haciendo matemática, deberemos organizar situaciones que enfrenten a los alumnos a genuinos problemas que les permitan utilizar sus conocimientos previos, elaborar conjeturas, ponerlas a prueba. Estos problemas deberían constituir la ocasión de explorar situaciones que permitan la construcción de conocimientos, pero también la elaboración de técnicas para resolver tipos de problemas y no sólo problemas aislados. Esas técnicas, elaboradas primeramente con los alumnos, deberían evolucionar para abarcar cada vez un número mayor de situaciones, hasta lograr una cierta técnica general, aunque no pueda ser algoritmizada.

Un proceso posible de aprendizaje relacionado con los primeros conceptos de matemática en la escuela, como son la suma y la multiplicación de naturales. Dado que los alumnos ya han trabajado con la suma, podrán planteárseles contextos que llamaríamos de multiplicación, que podrían resolver adaptando sus conocimientos de suma.

Un ejemplo de un proceso de construcción de conocimientos en niveles más altos de escolaridad es plantear la entrada al álgebra por medio de la generalización y la producción de fórmulas, como el caso de contar el número de cuadritos pintados en una cuadrícula.

LA TRANSPOSICION DIDACTICA EN ALGEBRA

El estudio de la transposición didáctica del álgebra pone de manifiesto que, en primera instancia, el álgebra es un instrumento al servicio del trabajo matemático. El álgebra es, en primer lugar, el *instrumento algebraico* que culmina en la *modelización algebraica* y, como tal, acaba transformando completamente las condiciones del trabajo matemático en todas las instituciones que manipulan dichos conocimientos y, en particular, en las instituciones docentes. Se pone así de manifiesto la conveniencia de que la *matemática escolar* se transforme *progresivamente* (en lugar de hacerlo de forma abrupta y descontrolada) mediante un *proceso de algebrización* que se inicie en la enseñanza obligatoria y culmine en la universitaria.

En la enseñanza tradicional no se tienen suficientemente en cuenta las dificultades en la comprensión, por parte del alumno, del tratamiento algebraico para la solución de situaciones problemáticas; logrando, en el mejor de los casos, que el alumno se convierta en un mero repetidor de procedimientos absolutamente rígidos, sin profundizar en el origen y significado de las distintas representaciones algebraicas y sus métodos de solución.

Gerard Vergnaud en su artículo: “Tiempo largo y tiempo corto en el aprendizaje del algebra”, analiza ciertos aspectos a tener en cuenta en la transición entre el tratamiento aritmético de una situación problemática a resolver y el tratamiento algebraico:

"El álgebra representa una doble ruptura espistemológica: por una parte, la introducción de un desarrollo formal en el tratamiento de problemas habitualmente tratados intuitivamente, por otra parte la introducción de objetos matemáticos nuevos como ecuación e incógnita, función y variable, monomio y polinomio."

" Algunas de las dificultades que se presentan en la Introducción del álgebra en el nivel medio: la significación del signo de igualdad, la introducción de procedimientos matemáticos nuevos, la función del álgebra con respecto a la aritmética, el sentido que se le puede dar eventualmente a la solución negativa de una ecuación, las nociones de sistema y de independencia".

"... el equilibrio de la balanza permite dar sentido a la vez a las propiedades de simetría y transitividad del signo de igualdad y a las

manipulaciones algebraicas que permiten resolver las ecuaciones con valores positivos".

"La aritmética consiste en elegir de manera intuitiva las incógnitas intermedias así como los datos y las operaciones a utilizar para calcularlas, mientras que el álgebra consiste en extraer relaciones sin comprometerse en un cálculo, y después tratar las ecuaciones de manera casi automática sin tener en cuenta el sentido. Por otro lado, el álgebra exige más a menudo que se manipulen incógnitas, lo que es anti intuitivo: los alumnos rechazan razonar y operar sobre incógnitas o sobre números desconocidos".

Patricia Perry en su artículo: "Aspectos claves en el álgebra escolar: ¿sabe que responderían sus estudiantes?, hace referencia a las ideas centrales consideradas por Booth. Menciona "aspectos que apuntan a diferencias importantes entre lo que implica hacer aritmética y hacer álgebra", entre ellos:

"El foco de la actividad algebraica y la naturaleza de las respuestas: el foco de la actividad aritmética es encontrar respuesta numéricas particulares mientras que el foco en la actividad algebraica es deducir procedimientos y relaciones, expresarlos en forma general y manipular con ellas.

El uso de la notación y la convención en álgebra: en aritmética, + significa realizar la operación de adición y el = significa escribir la respuesta, en cambio en álgebra + puede representar no sólo la acción de adicionar sino también el resultado de la correspondiente acción. De la misma manera el signo = puede representar no sólo la acción de escribir el resultado sino también una relación de equivalencia.

El significado de las letras y variables: en aritmética las letras se usan principalmente como etiquetas para representar objetos concretos mientras que en álgebra el uso de la letra está destinado principalmente a representar valores. En casos donde la letra, para la aritmética, representa un valor numérico, este es único; mientras que en álgebra las letras se usan para generalizar números..."

En el desarrollo de estrategias algebraicas, los alumnos deberían comenzar utilizando el lenguaje coloquial para explicar sus razonamientos; progresivamente, incorporan el uso de la letra como objeto, ante la necesidad de una representación más práctica. Más adelante, la utilizará como incógnita en la resolución de ecuaciones.

Actualmente se trata de desarrollar la enseñanza-aprendizaje del álgebra iniciando a los estudiantes con un lenguaje transicional que facilita la aproximación a una comprensión de los símbolos.

SIGNIFICADO Y EL CONCEPTO DE VARIABILIDAD.

Una de las mayores dificultades con que se encuentra un alumno al iniciar los estudios formales está en el uso y significado de las letras. Esto lleva a pensar que las dificultades del álgebra se deben a la naturaleza abstracta de sus elementos. **Collis** dice que esta dificultad no sólo se da con las letras a un determinado nivel, sino que está muy relacionada con el tamaño de los números en otros niveles. Cree que el pensamiento concreto permanece mientras está restringido a la experiencia concreta, y que se llega al pensamiento formal en el momento en el que se pueden manejar elementos abstractos y operaciones.

Colllis(1975) dice que los alumnos antes de llegar al razonamiento formal trabajan en uno de los tres niveles: ***los de nivel más bajo*** tienden a sustituir un número concreto por una letra y si no funciona, abandonan. ***En el segundo nivel,*** lo intentan con varios números, utilizando un método de ensayo y error. ***En el tercer nivel,*** los alumnos ya han obtenido el concepto de número generalizado expresándolo con un símbolo, que se puede ver como una entidad en sí misma, que tiene las mismas propiedades que cualquier número, y los números tienen un significado concreto debido las experiencias previas que se han tenido con ellas.

Para la enseñanza y aprendizaje del álgebra es fundamental el concepto de **variable(Schoenfeld, 1988)** y sin embargo, la mayoría de las veces las variables se utilizan como si pudieran entenderse sin ningún problema, simplemente, después de una cierta práctica; el uso de las variables de confunde con el uso de las *x*, las *y, …, o de otras letras,* manejándolas habitualmente con naturalidad, sin llegar a valorar ni la complejidad que tiene el concepto, ni los múltiples significados y usos que pueden tener las letras para los alumnos.

El concepto de **variable** se encuentra en la base de muchas situaciones algebraicas, aunque a veces no se observe de forma explícita. Esta circunstancia y el hecho de que con la variable se traten a la vez conjunto de valores son causa de muchas dificultades.

EL PASAJE DE LA ARITMETICA AL ALGEBRA

El pasaje de la aritmética al álgebra implica una ruptura que desemboca en un cambio fundamental con respecto a la mirada que tienen los alumnos sobre el quehacer matemático sostenido hasta este momento de su escolaridad. Identificar cuáles son las propiedades en las que se pueden apoyar para obtener soluciones y justificarlas, interpretar y producir diferentes escrituras para una misma expresión, tener la posibilidad de generalizar son algunos de los ejes de las propuestas para el aula que se pondrán a consideración de los docentes.

Las dificultades que presenta el aprendizaje del álgebra son analizadas desde dimensiones tradicionalmente postergadas: El álgebra como lenguaje (fases en la escritura simbólica de los alumnos; aspectos semánticos y sintácticos; traducciones entre lenguajes geométrico, aritmético, coloquial y algebraico). La visualización de relaciones algebraicas en construcciones geométricas. El álgebra como forma de pensamiento y razonamiento matemático desarrollado gradualmente en el tiempo, con procesos de generalización y mediante razonamientos inductivos. El álgebra como herramienta potente para generar modelos matemáticos. A través de la resolución de problemas como estrategia metodológica, se recorren “excursiones” históricas y lúdicas muy variadas que ponen en evidencia la naturaleza dinámica y modelizadora del álgebra. La cohesión interna de la matemática es destacada en la construcción de redes conceptuales con nodo algebraico y conexiones con la geometría, las funciones, las operaciones y la estadística. Se presentan ideas y recursos diversos para el trabajo del álgebra con los alumnos (fichas, cubos, rompecabezas, dominós y cuadrados mágicos algebraicos de fácil construcción y atractivos para los alumnos). Con procesos de reconstrucción y construcción de las clases, reflexión sobre la propia práctica y el análisis de videos de aula se construirán consensos que eviten la imposición de soluciones simplistas al problema complejo de desarrollar en los alumnos una genuina capacidad de pensamiento y razonamiento algebraico. (Delia Castiglioni)

EL ALGEBRA EN LOS LIBROS DE TEXTOS

Es importante tener en cuenta el contenido de los libros de textos de álgebra y ver como tratan dichos libros llevar al alumno al conocimiento del algebra, tratar de analizar la introducción como el final del mismo.

El capítulo introductorio de la mayor parte de los textos enfatiza la aritmética. Las representaciones algebraicas se tratan como enunciados generalizados de las operaciones aritméticas; es decir que se trabaja en términos procedimentales en donde los valores numéricos se sustituyen por expresiones algebraicas para obtener resultados específicos.

Sin embargo una vez que se ha completado esta introducción, relativamente suave, las representaciones algebraicas empiezan a tratarse como objetos matemáticos sobre los cuales se ejecutan ciertas operaciones estructurales tales como combinar términos; factorizar o restar un término en ambos lados de una ecuación.

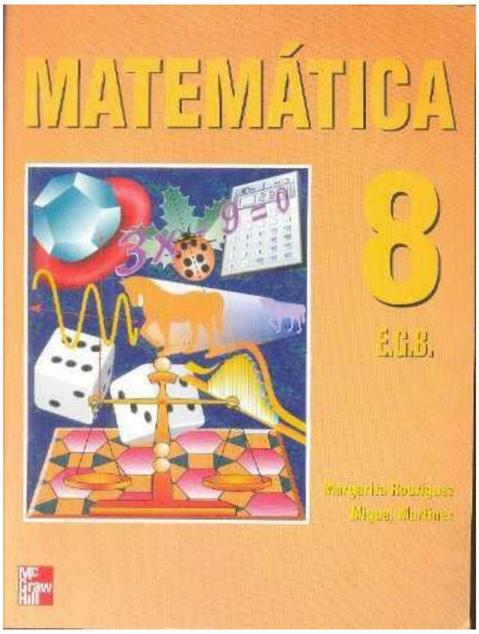
También en la mayoría de los libros de textos actuales hace una presentación del álgebra escolar centrada en la manipulación de expresiones simbólicas a partir de reglas generales que se refieren a objetos abstractos.

Los propios polinomios se introducen como tales, esto es, como expresiones con una indeterminada. Se trata entonces de que los alumnos actúen con la máxima rapidez en la realización de transformaciones de expresiones algebraicas, las cuales no tienen un significado que pueda aportar sentido a su trabajo. Como Lesley Booth(1989) pone de manifiesto “la habilidad para manipular los símbolos es importante, pero el aspecto crítico de tal trabajo es entender qué razones y justificaciones hacen que unas transformaciones sean lícitas y otras no”

A continuación vamos a analizar algunos libros de diferentes editoriales sobre el abordaje de la matemática y sobre todo como trabajan el tema del algebra:

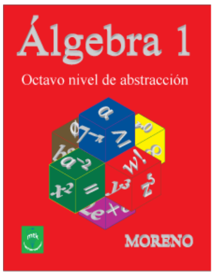
EDITORIAL MC GRAW HILL

Los libros de la editorial Mc Graw Hill tratan el tema del algebra a partir de parte histórica del algebra explicando como las formulas y ecuaciones en los inicios de la matemática se expresaba en forma verbal. Explica como surgieron los métodos algebraicos más antiguos, hace referencia al Papiro de Rhind, el libro de Diofanto. Introduce el tema algebraico con actividades relacionadas con diferentes frutas averiguando el valor que tiene cada fruta. Luego aborda mediante letras dándoles valores a una suma a + b = 51, entonces cual será el valor de 2(a +b)+ 3=.



Usa fórmulas sencillas, resuelve algunas ecuaciones, operan sobre expresiones algebraicas sencillas, trabaja el tema de la generalización en forma numérica y geométrica, traduce del lenguaje cotidiano al simbólico y utiliza el álgebra para resolver problemas.

LIBRO MATEMATIKE



Los libros de texto de álgebra, han sido elaborados siguiendo la dinámica de la espiral ascendente del conocimiento.

Para cada uno de los conceptos, o combinación de conceptos, en los diferentes niveles de abstracción, los libros presentan las estrategias pedagógicas, que permiten a los alumnos, usando sus sentidos, entenderlos, demostrarlos y aplicarlos para crear los algoritmos correspondientes y resolver problemas.

Contienen series de ejercicios con grado de dificultad ascendente, que permiten a los alumnos desarrollar la habilidad para resolver operaciones algebraicas y problemas.

Todos los libros de texto, tienen una versión electrónica para el maestro. Es una valiosa ayuda en el salón de clase, ya que el maestro puede proyectar sobre el pizarrón explicaciones, dibujos, procedimientos, problemas o ejercicios.

Los libros vienen acompañados del material didáctico necesario. Constan de 4 libros:

LIBRO 1: PREALGEBRA

Este libro consta de 223 páginas y el libro ha sido creado siguiendo la dinámica de la espiral ascendente del conocimiento.

Los alumnos que han seguido esta metodología desde el inicio, utilizan este libro en sexto de primaria y al comenzar primero de secundaria están listos para la gran aventura del álgebra.

Los estudiantes que han usado la forma tradicional de aprender matemáticas, utilizan este texto en primero de secundaria. Algunos de los contenidos tratados en este libro:

- Los números naturales representan objetos
- Los dígitos y el 0 son tetradimensionales
- Los números naturales también representan dimensiones
- Los número naturales del 0 al 99.
- Algoritmo de la mutiplicación y de la división
- Clasificación de los números reales.

LIBRO 2: ALGEBRA 1

El LIBRO empieza con el conocimiento de los números negativos, cuya realidad es matemática pero no tangible. El uso de las letras nos permite ampliar nuestro vocabulario matemático y el concepto de igualdad, despliega la belleza y potencia de las matemáticas.

En el último capítulo, aplicamos el concepto de ecuación para resolver problemas de proporciones, porcentaje e interés.

LIBRO 3: ALGEBRA 2

El álgebra es el lenguaje que nos permite construir el universo matemático, cuyas aplicaciones han hecho posible el desarrollo tecnológico que hoy vivimos. Las mismas operaciones que estudiamos en artimética, ahora las recreamos utilizando las herramientas del álgebra.

En el último capítulo, usamos la habilidad y conocimiento adquiridos, para resolver problemas de estadística y probabilidad.

LIBRO 4: ALGEBRA

El primer capítulo, Preálgebra, permite al estudiante la integración del conocimiento aritmético y lo prepara para la gran aventura del álgebra. En el último capítulo, Álgebra XIII, los alumnos aplican los sistemas de ecuaciones lineales, para hacer de una fracción algebraica fracciones parciales, conocimiento indispensable en algunos temas de cálculo integral.

El texto cuenta con 771 problemas con solución detallada y 6,616 problemas propuestos con su respuesta al final de cada capítulo.

EDITORIAL SANTILLANA

La editorial Santillana ha lanzado al mercado 3 libros para educación egb3. Constan de 3 libros para EGB3 que son: Matemática 1, Matemática 2 y Matemática 3. En la primera hoja del capítulo de algebra comienza con la parte histórica sobre algebra.

El libro de Matemática 1 se trabajan contenidos como:

- Múltiplos y divisores
- Reglas de divisibilidad
- Números Primos y compuestos
- Múltiplos y divisores comunes
- Descomposición en factores primos.

El libro de Matemática 2 propone contenidos a trabajar como:

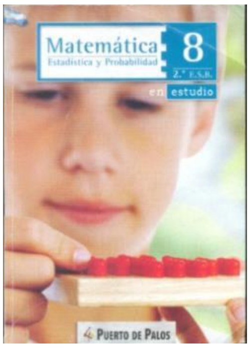
- Ecuaciones con una incógnita
- Predecir el número
- **OPERACIONES CON LETRAS.**

El libro 3 trabajan los siguientes contenidos:

- **OPERACIONES CON EXPRESIONES ALGEBRAÍCA**
- **TEOREMA DE PITAGORAS**
- **ECUACIONES**

En todos los libros tienen al final una autoevaluación.

EDITORIAL PUERTOS DE PALOS



Presenta noticias verídicas de diarios locales, especialmente seleccionados para trabajar los principales contenidos matemáticos de cada año.

En 7mo. año, se trabaja sobre contenidos de Estadística y probabilidad, Números naturales, Números enteros, Figuras plana, en lo que tiene que ver con el estudio del algebra lo trata en el contenido Funciones.

En 8vo. año, los contenidos abordados son: Números enteros, Números racionales, Funciones, Cuerpos geométricos, Triángulos, y Estadística y probabilidad.

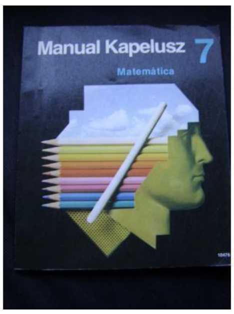
En 9no. Año se aborda un poco más el tema de algebra, como son la proporcionalidad las ecuaciones y las funciones el cuadernillo presenta propuestas de trabajo sobre Proporcionalidad, Funciones, Estadística y probabilidad, SIMELA, Razones y proporciones, Números reales y Circunferencia y círculo.

La versión para el docente contiene todas las soluciones a las actividades propuestas.

Matemática 7, 8 y 9 se presentan como "libros-carpeta". Este sistema brinda la posibilidad de trabajar cada concepto en forma autónoma, sistemática y progresiva.

EDITORIAL KAPELUSZ

Matemática 7



El enfoque que propone esta editorial, de la enseñanza de la disciplina es tradicional y se presenta a través de problemáticas (ejercitación) variadas. Cada capítulo propicia la práctica de un método de enseñanza de la Matemática basado en la adquisición de habilidades cognitivas que posibilitan el desarrollo en los alumnos de razonamientos deductivos (por ejemplo, cálculo reversible), inductivos (a través de ejercicios de hipotetización), etcétera. Se abordan contenidos algebraicos como introducción a la ecuación, se trabaja con propiedades de potenciación y radicación, etc. La metodología utilizada también recurre a la comunicación de resultados a la clase, instancia destinada al ejercicio del pensamiento lógico.

Matemática 8

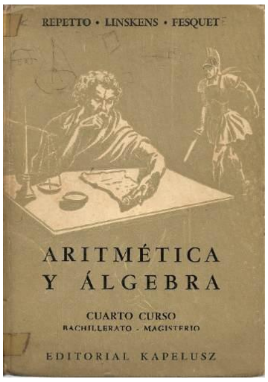
En este libro se trabaja de la misma manera que en el Libro de Matemática 7 pero abordando con más profundidad el tema de las ecuaciones y las proporcionalidades, propiedades de potenciación y radicación con números racionales.

LIBRO DE ALGEBRA DE REPETTO LINSKEN Y FESQUET

Uno de los libros más antiguos y que aún hoy en día se siguen utilizando es el libro de algebra de Repetto Linskens y Fesquet. En el mismo el álgebra se aborda desde una perspectiva no constructivista, ya que impera mucho la parte teórica y luego propone muchos ejercicios con soluciones. Es un libro bastante conductista, ya que no tiene temas de iniciación con actividades motivadoras, directamente introduce la teoría.

Los contenidos algebraicos tratados en dicho libro son:

- Nociones sobre estructuras algebraicas e isomorfismo.
- Números reales.
- Números complejos.
- Funciones elementales.
- Ecuaciones de segundo grado con una incógnita.



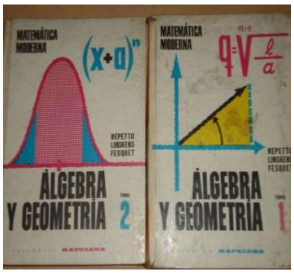
- Logaritmos.

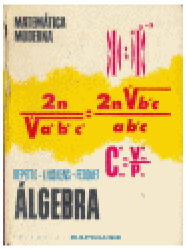
- Sucesiones.

- Combinatoria.

- Nociones de estadística.

- Introducción al cálculo de probabilidad





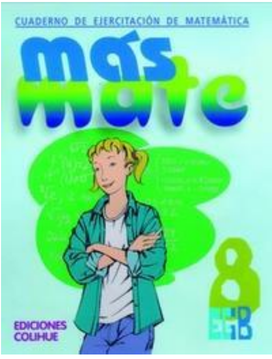
EDITORIAL COLIHUE

El tratamiento del lenguaje algebraico en este libro que son 3 para EGB3, abordan los contenidos desde una perspectiva constructivista, ya que introduce los temas con una situación asociadas con la vida real, por ejemplo el mago en adivina un número, tiene actividades de autoevaluación y de práctica. Es un buen libro para tratar el tema del algebra a través de situaciones asociadas al mundo en que vivimos.

Matemática 8vo año:

Cada unidad incluye: una historieta inicial que plantea situaciones problemáticas. Una serie de Problemas y una amplia variedad de Ejercicios complementarios; los desafíos son problemas de ingenio, un recurso para desarrollar competencias en la resolución de operaciones lógicas; una Autoevaluación, con sus respuestas, para que el alumno la resuelva en forma individual. La última unidad de cada cuaderno contiene ejercicios integradores. Un diseño atractivo completa la propuesta. Bloques de contenidos abordados en forma gradual a lo largo de la serie: Números; Combinatoria, Probabilidad y Estadística; **ECUACIONES, INECUACIONES Y SISTEMAS; FUNCIONES**; Geometría.

EN EL LIBRO DE NOVENO AÑO TRATAN LOS TEMAS DE ECUACIONES, INECUACIONES Y SISTEMAS; FUNCIONES a través de actividades relacionadas con la vida real. EN EL LIBRO DE 7MO GRADO TAMBIEN TRATAN LOS MISMOS TEMAS QUE EN NOVENO PERO CON MENOR COMPLEJIDAD.



EL ALGEBRA EN EL SISTEMA EDUCATIVO

UN POCO DE HISTORIA

La **educación en Argentina**, llamada también "*La docta latinoamericana*", ha tenido una historia revuelta. Empezó a tener peso a partir del presidente Domingo Faustino Sarmiento. Sarmiento fomentó la inmigración y trajo educadores europeos y construyó escuelas y bibliotecas en todo el país, que terminó con doblar la inscripción de alumnos al final de su mandato. El día del maestro coincide con el día en el que murió Sarmiento, el 11 de septiembre, para conmemoración del trabajo realizado por tal presidente.

La primera ley de educación universal, obligatoria, gratuita y laica (Ley 1420 de Educación) fue sancionada en 1884 durante el mandato de Julio Argentino Roca a pesar de la gran oposición proveniente de la Iglesia Católica tanto a través del clero local como del Vaticano a través del nuncio papal.[1]

La educación religiosa en la escuela pública se re-estableció en diciembre de 1943, durante la breve dictadura de Pedro Pablo Ramírez y se mantuvo cuando en 1946 asumió el gobierno Juan Domingo Perón. Es recién en medio de un conflicto con la Iglesia Católica que en 1954 Perón derogó la enseñanza religiosa. Durante su gobierno (1946–1955), la educación pública fue utilizada para propiciar un culto personal sobre las figuras del presidente y su esposa (imágenes de Perón y Evita eran incluidas prominentemente en el material educativo, fragmentos de sus discursos y escritos fueron utilizados como material de lectura, etc).[2]

La Revolución Libertadora (golpe militar que destituyó a Perón en 1955) dispuso que fueran destruidos los libros de propaganda peronista y prohibió 1a mera mención o representación de Perón o Evita mediante el decreto 4161 del 5 de marzo de 1956 que se mantuvo en vigencia hasta 1958.

La educación Pública, como el resto de la cultura argentina, sufrió mucho la crisis económica de los años 90. Mientras la economía se ha ido recuperando constantemente desde 2002, la mayoría de los establecimientos educativos públicos (escuelas y universidades) siguen contando con bajos niveles presupuestarios, y las interrupciones no son inusuales debido a los reclamos docentes.

En 1994 se aprobó la Ley Federal de Educación donde surgen de allí los Contenidos Básicos Comunes. El sistema educativo se dividía en:

- EGB1
- EGB2
- EGB3
- POLIMODAL

Es en el día de hoy, que la educación argentina es considerada como una de las más avanzadas y progresistas de América Latina, así como también, es firmemente reconocida y destacada por diversos organismos internacionales, como lo son la UNESCO y la UNICEF. La educación se divide en cuatro niveles. El primero comprende los grados primero a sexto y se llama Educación Primaria Básica o EPB (ex EGB I y II). La EPB está dividido en dos etapas llamados ciclos: EPB I: Primero, Segundo y Tercer año escolar

1. EPB II: Cuarto, Quinto y Sexto año escolar

El siguiente nivel es la Educación Secundaria Básica o ESB (ex EGB III) que comprende los años escolares Séptimo, Octavo y Noveno (actuales Primero, Segundo y Tercero de la ESB). Una vez finalizada la ESB, los estudiantes comienzan la Educación Secundaria Superior o ESS (ex Polimodal), que dura tres años y ofrece diferentes orientaciones. Al culminar la ESS los alumnos completan la educación obligatoria en Argentina.

El cuarto nivel es la educación superior o universitaria.

Este nivel es solo aplicado por las provincias que adoptaron el sistema educacional. Las demás provincias siguen con el mismo y viejo sistema de 7 años de primaria y 5 de secundaria (Capital Federal, Río Negro, La Pampa, etc.).

LA ENSEÑANZA DEL ALGEBRA A LO LARGO DEL SISTEMA EDUCATIVO ARGENTINO

El desarrollo histórico del álgebra sugiere que actualmente ésta se concibe como la rama de las matemáticas que trata la simbolización de relaciones numéricas generales y de estructuras matemáticas así como de la operación sobre esas estructuras.

Los temas típicos incluyen:

- Propiedades de los números reales y complejos.
- El planteamiento y resolución de ecuaciones de primer y segundo grado en una incógnita.
- La simplificación de expresiones polinómicas y racionales.

- La representación simbólica de funciones lineales, cuadráticas, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas, junto con sus gráficas
- Series y sucesiones.

El contenido del álgebra escolar ha cambiado poco. Al comienzo de este siglo los cursos iniciales de álgebra cubrían temas como: Simplificación de expresiones.

Planteo y resolución de ecuaciones lineales y cuadráticas. Uso de tales técnicas para hallar respuestas a problemas. Práctica con razones, proporciones, potencias y raíces.

En las siguientes décadas se incluyeron aspectos prácticos y el uso de los métodos gráficos. Al comienzo de los años 60 se vio una brecha muy grande entre el álgebra escolar y las necesidades de ella en campos como la física nuclear, la exploración espacial, las comunicaciones y la tecnología computacional. Se crean entonces las nuevas tecnologías.

Según los diseños curriculares de la vigente ley de educación, los objetivos fundamentales que se pretende alcanzar con la enseñanza del álgebra son:

- ❖ Conseguir que los alumnos sean capaces de expresar simbólicamente determinadas relaciones y procesos de carácter general.
- ❖ Lograr que los alumnos alcancen destrezas en la manipulación de las expresiones simbólicas.

En educación primaria no se puede pretender más que un cierto acercamiento al uso del simbolismo. Por ejemplo, mediante juego con balanzas, introducir ecuaciones del tipo $x + 3 = 7$, que serán resueltas de forma intuitiva, sin un estudio pormenorizado de las transformaciones algebraicas subyacentes.

Las letras y los signos (símbolos) son parte del lenguaje algebraico y las operaciones con números parte del lenguaje numérico. Ambos lenguajes permiten expresar conexiones entre números y variables. La iniciación en el uso y la comprensión de estos lenguajes comenzará en el nivel secundario. Claro que por su nivel de abstracción es necesaria una etapa en la que los alumnos exploraran el uso de estos lenguajes y de los conceptos algebraicos de manera informal. Hablar de intelectuales, Bourdieu los concibe como agentes que ocupan posiciones diferentes en las instituciones según el capital específico que poseen, y elaboran distintas estrategias para defender su capital (el que pudieron acumular en el curso de luchas anteriores), capital simbólico, de reconocimiento y consagración, de legitimidad y de autoridad, a pesar de que las prácticas de los agentes pudieran parecer desinteresadas.

Se incluyen las desigualdades y se hace énfasis en conceptos unificadores como **conjunto** y **función** a fin de enseñarlos de manera que su estructura y carácter deductivo fuera evidente.

Se mantiene el carácter estructural que era evidente a comienzos del siglo. Ejemplos de aspectos estructurales del álgebra superior tradicional incluyen: **simplificación y factorización de expresiones; resolución de ecuaciones haciendo operaciones en ambos lados y manipulación de parámetros de ecuaciones funcionales tales como $y = v + (x - h)^3$,** para manejar familias de funciones.

Diferencia entre Algebra y Aritmética

Uno de los conceptos pocos claros es de poder diferenciar lo algebraico y lo aritmético, ¿Cuándo hacemos algebra? ¿Cuándo trabajamos con la aritmética?

El concepto de la cantidad en algebra es mucho más amplio que en aritmética. En aritmética las cantidades se expresan en números y estos expresan valores determinados. Así, 20 expresa un solo valor: veinte; para expresar un valor menor o mayor que este habrá que escribir un número distinto de 20. En algebra, para lograr la generalización, las cantidades se representan por medio de letras, las cuales pueden representar todos los valores. Así, *a* representa el valor que nosotros le asignemos, y por lo tanto puede representar 20 o más de 20 o menos de 20, a nuestra elección, aunque conviene advertir que cuando en un problema asignamos a una letra un valor determinado, esa letra no puede representar, en el mismo problema, otro valor distinto del que le hemos asignado.

Notación algebraica

Los símbolos usados en algebra para representar las cantidades son los números y las letras.

Los **números** se emplean para representar cantidades conocidas y determinadas. Las **letras** se emplean para representar toda clase de cantidades, ya sean conocidas o desconocidas.

Las cantidades conocidas se expresan por la primera letra del alfabeto: a, b, c, d…

Las cantidades desconocidas se representan por las últimas letras del alfabeto: u, v, w, x, y, z.

Una misma letra puede representar distintos valores diferenciándolos por medio de comillas; por ejemplo: *a', a'', a'''*, que se lee *a* prima, *a* segunda, *a* tercera, o también por medio de subíndices; por ejemplo: , que se leen *a* subuno, *a* subdos, *a* subtres.

Fórmulas

Consecuencia de la generalización que implica la representación de las cantidades por medio de letras son las formulas algebraicas.

Fórmula algebraica es la representación, por medio de letras, de una regla o de un principio general.

Así, la geometría enseña que el área de un rectángulo es igual al producto de su base por su altura; luego, llamando A al área del rectángulo, *b* a la base, y *h* a la altura, la fórmula: A = *b* x *h*, representara de una forma general el aria de cualquier rectángulo, pues el área de un rectángulo dado se obtendrá con solo sustituir a y h en la formula anterior por sus valores en el caso dado.

Signos del álgebra

Los símbolos empleados en algebra son de tres clases: signos de operación (+, -, x, /, potencias y raíces), signos de relación (=, >, <) y signos de agrupación ((), {}, []).

LAS NUEVAS CORRIENTES SOBRE LA ENSEÑANZA DEL ALGEBRA

A continuación se dará a conocer diferentes corrientes que tratan la enseñanza del álgebra hoy en día.

HACIA UNA GENERALIZACION DEL ALGEBRA

El Álgebra y sus procesos han preocupado a docentes e investigadores. Actualmente, las vías propuestas para introducir el Álgebra en la escuela son: la generalización, la resolución de problemas, la modelización y la funcional (Bernard y otros, 1996). De aquí nuestro interés en el estudio concreto de la sustitución formal, la generalización y la modelización, procesos que forman parte de las destrezas necesarias para comprender y utilizar el Álgebra, y que se encuentran implícitos en el desarrollo de las Matemáticas escolares.

El álgebra clásica, que se ocupa de resolver ecuaciones, utiliza símbolos en vez de números específicos y operaciones aritméticas para determinar cómo usar dichos símbolos. El álgebra moderna ha evolucionado desde el álgebra clásica al poner más atención en las estructuras matemáticas. Los matemáticos consideran al álgebra moderna como un conjunto de objetos con reglas que los conectan o relacionan. Así, en su forma más general, una buena definición de álgebra es la que dice que el álgebra es el idioma de las matemáticas.

Generalización de la aritmética en la que se utilizan símbolos literales para representar cantidades desconocidas de manera que podamos generalizar relaciones y patrones aritméticos específicos. Por ejemplo, los hechos aritméticos 3 + 3 + 3 + 3 = 4 x 3 y 5 + 5 + 5 + 5 = 4 x 5 son casos particulares del enunciado algebraico z + z + z + z = 4z. Se utilizan letras para denotar cualquier número, o cualquiera de ciertos grupos de números, como todos los números reales, para relacionar leyes que se conservan para cualquier número dentro del grupo

Hablando matemáticamente ¿Qué es una generalización? Esta palabra parece ser un martirio para muchos estudiantes que empiezan en el mundo del álgebra, puesto que el paso del mundo concreto al abstracto les trae un poco de incomodidad debido a que los profesores muchas veces se saltan un lenguaje matemático ¿Cómo? se preguntarán. En el mundo de la aritmética no se explica o literalmente no se toma en cuenta por la mayoría de los profesores a la hora de aplicar la transposición didáctica a sus alumnos, es decir, se pasa de inmediato a lo algebraico, como por ejemplo: Juan tiene x años ¿Cuántos años tendrá en 5 años más?... Este parece ser el típico ejemplo a la hora de empezar a estudiar el álgebra, ¿Pero no sería más factible empezar por un ejemplo concreto y real? es decir, Juan tiene 15 años ¿Cuántos años tendrá en 5 años más? es aquí donde el alumno relaciona las propiedades a utilizar y desde aquí se tiene que generalizar, es decir, la respuesta al problema sería : 15+5=20, luego de esto se puede generalizar al álgebra, donde la respuesta es x+5, sabiendo que esa x representa el valor actual de la edad de Juan, para que así los alumnos partan con una base conocida y real para la construcción personal de su conocimiento.

Cuan importante es el lenguaje dentro del ser humano, con esto quiero decir que sin lenguaje no existe posibilidad de avanzar en ningún ámbito de cosas y es por esto que como futuro profesor de matemáticas, no debo confundir el lenguaje matemático en juego o sino mis alumnos lo confundirán también y debo ser claro a la hora de explicar los conceptos matemáticos y sobre todo pasar desde el lenguaje aritmético al lenguaje algebraico de una forma fluida teniendo en cuenta la generalización, debido que esta palabra es muy importante en matemáticas, puesto que ahorra mucha escritura y permite avanzar mucho más rápido. Como docente de matemática, una de las metas que se persigue es de poder lograr que los alumnos pasen de un lenguaje a otro de una forma fluida para que así ellos logren un paso importante en su propio proceso de enseñanza y aprendizaje.

Las reglas del álgebra constituyen expresiones que expresan generalidades, pero los patrones que se observan aparecen en las mismas colecciones de números, y en las operaciones comunes que se hacen con estos números o como modelos que describen situaciones. Es así como el mayor reto en la enseñanza del álgebra es promover la percepción de la "generalidad" que está detrás de los símbolos, para lo cual es necesario tener en cuenta los siguientes aspectos:

- Deben propiciarse actividades que involucren la generalización de patrones numéricos para modelar, representar o describir patrones físicos, regularidades y patrones que se hayan observado. Estas exploraciones informales de conceptos algebraicos deben contribuir a que el estudiante adquiera confianza en su propia capacidad de abstraer relaciones a partir de información contextual y de utilizar toda una gama de representaciones para describir dichas relaciones. Cuando los estudiantes elaboran gráficas, tablas de datos, expresiones, ecuaciones o descripciones verbales para representar una relación simple, descubren que representaciones diferentes dan lugar a diferentes interpretaciones de una situación (NCTM).

- La generalidad es un aspecto central en la actividad matemática, a todo nivel, y, a la cual se puede retornar una y otra vez, cualquiera que sea el tema particular de discusión. Las matemáticas comprenden muchas generalizaciones, ya sea que tomen forma de métodos, procedimientos, o de fórmulas, y estas pueden ser vistas como originándose de la misma manera que las propias generalizaciones de los patrones, hechas por los alumnos.

- El álgebra es el lenguaje con que se expresa dicha generalidad. Para aprender el lenguaje del álgebra es necesario tener algo que decir, se debe percibir algún patrón o regularidad y luego tratar de expresarlo en forma sucinta, para poder comunicarlo a alguien. Esta expresión de la generalidad también se puede usar para responder preguntas especificas. (Rutas hacia el álgebra. John Mason y otros, 1999)

- Se debe dedicar un tiempo considerable al trabajo de las etapas iniciales de *ver* y *decir* un patrón. ”Ver” hace relación a la identificación mental de un patrón o una relación (ver un patrón puede ocurrir después de un periodo de tiempo trabajando con un numero de ejemplos particulares), y con frecuencia esto sucede cuando se logra la identificación de un algo común, logro que va acompañado de una sensación de regocijo. El “decir”, ya sea a uno mismo o a alguien en particular, es un intento de articular, en palabras, esto que se ha reconocido. “Registrar” es hacer visible el lenguaje, lo cual requiere de un movimiento hacia los símbolos y la comunicación escrita (incluyendo dibujos).

El estudio de la generalización puede ayudar a resolver algunos de estos problemas. En el proceso de generalización se está tratando con variables, pues al intentar hallar el término general de una sucesión de figuras o de números es una manera de abordar una variable: *el lugar de orden es la variable independiente y los casos particulares pueden interpretarse como valores de la variable.* Estos casos particulares, al estudiarse, permiten encontrar propiedades comunes y pautas que pueden conducir a la expresión general.

Adquirir el concepto de variable supone la conjunción de dos procesos:

1) **Generalización:** que permite pasar de un conjunto de situaciones concretas a algún aspecto común a todas ellas.
2) **Simbolización:** que permite expresar de forma abreviada lo que tienen en común todas las situaciones.

Para que se pongan en práctica de forma simultánea estos dos procesos, hace falta utilizar en cada caso capacidades muy distintas y a la hora de planificar cualquier estrategia de enseñanza se deben abordar cada uno de ellos de forma diferente. Cuando se habla del concepto de variable se incluyen múltiplos significados, y cada uno de ellos se corresponde con las distintas formas de enfrentarnos a la generalización.

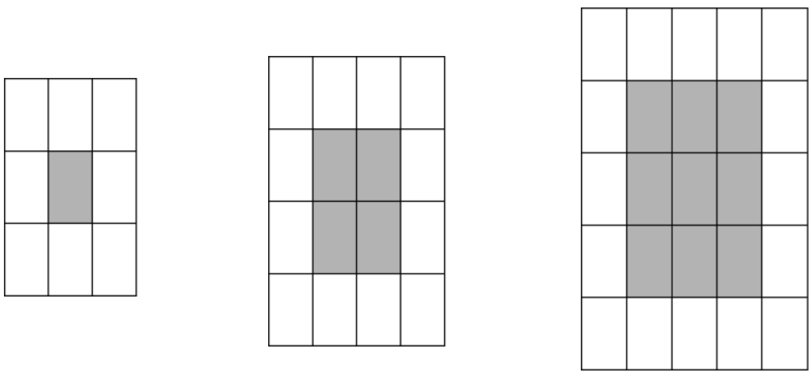
PROPUESTA PARA LA ENSEÑANZA DEL ALGEBRA COMO INICIO A LA GENERALIZACIÓN

Fórmulas

cuadráticas

Problema 1:

a. ¿Cuántos cuadraditos hay pintados en cada cuadrado?

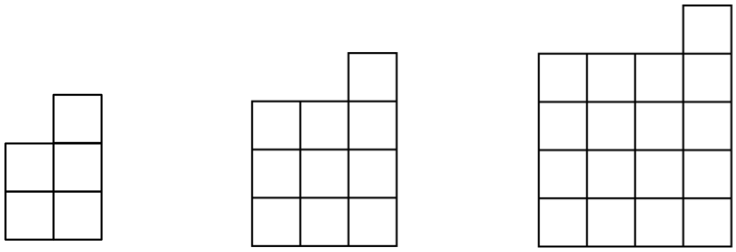


b. ¿Cuántos cuadraditos habrá pintados en un cuadrado que respete las mismas condiciones de pintado que los cuadrados de la parte a, si el lado tiene 27 cuadraditos?
c. "Ustedes acaban de utilizar un método para calcular el número de cuadritos pintados cuando el lado del cuadrado tiene 27 cuadritos. Ahora tienen que explicar por escrito como es el método, de manera tal que sea posible utilizar ese método para calcular el número de cuadritos sombreados, cualquiera sea el número de cuadritos por lado. Pueden usar una o varias frases.
d. Encontrar una fórmula que permita determinar la cantidad de

cuadraditos sombreados del cuadrado, cualquiera sea el número de cuadraditos por lado.

Problema 2:

a. ¿Cuántos cuadraditos tendrá una figura que tiene las mismas características que las figuras que se presentan a continuación, pero con 37 cuadraditos en cada lado del cuadrado?



b. Encontrar una fórmula que permita determinar la cantidad de cuadraditos que tiene un dibujo como los de la parte a, si la cantidad de cuadraditos del lado del cuadrado es n.

c. ¿Es posible que un dibujo con características similares a los de la parte a tenga 82 cuadraditos? ¿y 2210 cuadraditos? ¿Por qué?

Algebrización de los Programas de Cálculo Aritmético

Los Programas de Cálculo Aritmético es impulsado por Gascon(1993, 1993-94 y 1999) en el ámbito de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) en los que se ha analizado el fenómeno de la aritmetización del álgebra escolar, mostrando que dicho fenómeno responde a la interpretación dominante en la institución escolar del álgebra elemental como aritmética generalizada. Esta interpretación consiste en identificar el álgebra escolar con el "simbolismo algebraico" (o lenguaje algebraico), frente a un supuesto "lenguaje aritmético". En la tesis de Pilar Bolea (2002) se destacan algunas de las características principales de esta interpretación del álgebra escolar como aritmética generalizada:

a) El álgebra escolar se construye en un contexto numérico, a modo de generalización de los cálculos con números y de la traducción

b) de expresiones numérico-verbales.

c) Las expresiones algebraicas nacen de la necesidad de representar y manipular números desconocidos.

d) En la escritura y manipulación de expresiones algebraicas, es muy importante distinguir entre los datos conocidos y las incógnitas.

e) Las tareas más importantes en álgebra escolar son la traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico; el cálculo algebraico (interpretado como la manipulación formal de las reglas aritméticas con letras y números) y la resolución de ecuaciones.

A continuación se presentará diferentes modelizaciones progresivas sobre el tratamiento hacia la introducción del algebra:

Primera etapa del proceso de algebrización

Para ejemplificar un primer tipo de incompletitud de la OM inicial en torno a los problemas aritméticos, podemos considerar un problema (que también formularemos en términos de la ejecución de PCA) como el siguiente:

P1: Piensa un número, súmale el doble de su consecutivo, suma 15 al resultado y, por último, resta el triple del número pensado inicialmente. ¿Qué resultado se obtiene? ¿Qué pasa si se cambia el número pensado inicialmente?

Por ejemplo, si el número es 49, se obtiene: PCA (49) = 49 + 2·50 + 15 – 3·49 = 17.

Si se toma inicialmente el 10, se obtiene: PCA (10) = 10 + 2·11 + 15 – 3·10 = 17.

La resolución aritmética de este problema, es decir la ejecución del PCA indicado, proporciona siempre el mismo resultado numérico, 17, independientemente del número pensado inicialmente. Aparece, por tanto, una cuestión tecnológica

Segunda etapa del proceso de algebrización

En este caso, no conocemos el resultado de ejecutar este PCA y, por lo tanto, no se obtiene ninguna respuesta aplicando el Patrón de Análisis-Síntesis. La condición del problema se expresa como una igualdad entre dos PCA, PCA1(n) = 3n – 15 = 2n + 4 = PCA2(n), que (supuestamente) se cumple para cierto valor de n.

Tercera etapa del proceso de algebrización

Dependiendo de la naturaleza del problema y del contexto en el que se formule, las cuestiones de este tipo pueden multiplicarse. La resolución de este tipo de cuestiones comporta una fuerte generalización del cálculo ecuacional al tiempo que amplía enormemente la clase a la que pertenece un problema aritmético. El problema siguiente permite un cuestionamiento del tipo anterior:

P3: En un banco nos proponen el siguiente plan de inversiones: nos dan un 5% cada trimestre y nos descuentan un 1% al final del año en concepto de comisión. ¿Cuál será el capital al final del año si la inversión inicial ha sido de 1000 €? ¿Y de aquí a 3 años? ¿Qué capital inicial debería invertir para que este se hubiese triplicado al final del año? ¿Qué porcentaje deberíamos negociar con el banco cada trimestre para duplicar el capital inicial a final de año? ¿Cuánto tiempo ha de pasar para que el capital inicial se triplique?, etc.

ACTIVIDADES PARA TRABAJAR LOS PCA DE GASCONS

Programas de Cálculo Aritmético para ser dictados

1. Piensa un número

Multiplícalo por 4 Súmale 5

al resultado Multiplícalo

todo por 9 Divídelo todo

por 3

2. *Como 1 pero en un orden diferente*

Piensa un número Súmale 5

Divídelo por 3

Multiplícalo por 4

Multiplícalo por 9

3. *No siempre da un resultado entero*

Piensa un número

Multiplícalo por 2 Súmale 9

al resultado Multiplícalo por

10

Divídelo por 8

4. *No siempre da un resultado entero*

Piensa un número Divídelo

por 15

Súmale 7

Multiplícalo por 5

Réstale 18.

5. Piensa un número Súmale 572

Réstale 151 Réstale 188

Divídelo por 4

6. Piensa un número Súmale 18

Réstale 7 Multiplícalo por 5

Réstale 30 Divídelo por 15

7. Piensa un número Súmale 2000

Divídelo por 10 Réstale 200

Multiplícalo por 20

8. Piensa un número Súmale el

consecutivo Réstale 9

Multiplícalo por 4

Multiplícalo por 3

9. Piensa un número

Súmale el doble del número

Divídelo por 3 Réstale el número

pensado. Súmale 75

COMENTARIOS:

El 3, 4 y 5 son buenos ejemplos para introducir la cuestión de la **“forma de los números”.**

El 6 puede utilizarse para plantear la **necesidad y la utilidad de los paréntesis**.

En el 8 aparece la dificultad del “consecutivo”. Se entiende entonces que trabajamos con números enteros. En caso contrario, podríamos cambiarlo por “el triple”.

El 9 es un PCA que siempre da 75. **¿Podéis explicar por qué?** En este caso es posible la simplificación verbal.

Es importante introducir la noción de Programa de Cálculo Aritmético para institucionalizar el tipo de ejercicios que estamos haciendo y poder referirse explícitamente a los PCA. En este momento aparece la tarea de **“inventar” PCA que cumplan ciertas condiciones**.

LAS NTICS COMO HERRAMIENTA DE APRENDIZAJE EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMATICA

Hoy en día las Nuevas Tecnologías de la Información y la Comunicación han supuesto una gran revolución en el ámbito educativo puesto que ha supuesto una profunda modificación de la metodología de la mayoría de los profesores y profesoras. En este sentido, la adopción de medidas para el impulso de la sociedad del conocimiento y, en particular, la apuesta por la introducción de las TIC en el ámbito educativo, constituyen una importante contribución de carácter social que debe aprovecharse para la mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje en general. Las Nuevas Tecnologías de la Información y la Comunicación actualmente son una herramienta presente no sólo en los centros escolares, sino en la mayoría de los hogares, que proporciona, con un uso adecuado, un amplio campo de recursos para que los alumnos refuercen y practiquen las enseñanzas aprendidas en el contexto escolar.

Dichas herramientas deben aprovecharse para el desarrollo de los procesos de aprendizaje y para facilitar la comprensión de los conceptos, dando menos peso a los algoritmos rutinarios y poniendo énfasis en los significados y razonamientos. En definitiva, las TIC han de contribuir a un cambio sustancial del qué enseñar, poniendo el énfasis en los significados, en los razonamientos y en la comunicación de los procesos seguidos, dando progresivamente menos peso a los algoritmos rutinarios. Una de las asignaturas que encuentra en el ámbito TIC un entorno muy favorable para el aprendizaje son las Matemáticas

Los recursos gratuitos para la práctica de matemáticas disponibles en la Red son numerosos, por ello, he realizado una selección de aquellos que recopilan de forma más genérica los conceptos, dentro La Educación General Básica y Polimodal debe tener como propósito que los estudiantes alcancen las 'competencias matemáticas' necesarias para comprender, utilizar, aplicar y comunicar conceptos y procedimientos matemáticos. Que puedan a través de la exploración, abstracción, clasificación, medición y estimación, llegar a resultados que les permitan comunicarse y hacer interpretaciones y representaciones; es decir, descubrir que las matemáticas y en particular el álgebra están relacionadas con la vida y con las situaciones que los rodean, más allá de las paredes de la escuela

LAS NTICS EN LA ENSEÑANZA DEL ALGEBRA

Hoy en día en la red de Internet podemos encontrar infinidad de recursos muy útiles para trabajar el Bloque de Álgebra, pero tenemos que ser extraordinariamente selectivos puesto que algunos de ellos pueden ocasionarnos más perjuicio que beneficio al no saber seleccionar correctamente aquellos que pueden ser más didácticos y motivadores en nuestro objetivo de mejorar y consolidar la comprensión de los conceptos aprendidos.

Un ejemplo evidente de lo que me estoy refiriendo es que en algunas páginas webs al tratar la resolución de ecuaciones de primer grado sencillas utiliza como paso intermedio la simplificación de términos semejantes a un lado y al otro de la igualdad en vez de la transposición de términos (el famoso “los números a un lado, las x al otro”). Por esto mismo, tenemos que ser cuidadosos puesto que si en nuestra sesión de clase explicamos la resolución de las ecuaciones de primer grado utilizando la transposición de términos, debemos procurar usar un recurso TIC que utilice nuestro mismo procedimiento para no confundir a nuestro alumnado

A continuación voy a dar a conocer algunas de las herramientas que podemos encontrar en la red de Internet o programas de propósitos generales o hechos a medida:

PROGRAMAS DE PROPOSITOS GENERALES

Los programas de hoja de cálculo, presentes en todos los paquetes de programas de computadoras para oficina, pueden ser utilizadas por los estudiantes en la clase de Matemáticas como herramienta numérica (cálculos, formatos de números); algebraica (formulas, variables); visual (formatos, patrones); gráfica (representación de datos); y de organización (tabular datos, plantear problemas). Por otro lado, a pesar de la controversia que genera el uso de calculadoras por parte de los estudiantes, hay mucha evidencia que soporta su uso apropiado para mejorar logros en Matemática.

Las calculadoras gráficas enfatizan la manipulación de símbolos algebraicos, permitiendo graficar funciones, ampliarlas, reducirlas y comparar las gráficas de varios tipos de funciones. Adicionalmente, las herramientas para graficar y analizar datos posibilitan que el estudiante descubra patrones en datos complejos, ampliando de esta forma su razonamiento estadístico. El nivel de tecnología utilizada en las empresas es cada día mayor. Muchos puestos de trabajo incluyen herramientas informáticas (hoja de cálculo, calculadora, calculadora gráfica, software para analizar y graficar datos) y se espera del sistema educativo que prepare a los estudiantes para desenvolverse con propiedad con estas tecnologías.

Los procesadores de textos también son herramientas fundamentales a la hora de hacer matemática. Son útiles para escribir ejercicios combinados con raíces, potencias, logaritmos, fracciones, como así también transcribir ecuaciones.

www.genmagic.net

En ella, tenemos dos aplicaciones informáticas muy interesantes para trabajar con nuestros alumnos con los siguientes nombres:

[Expresiones algebraicas]()

En esta aplicación informática podemos trabajar ampliamente los conceptos de monomios y polinomios a nivel de 2º y 3º de ESO. Se divide en 4 secciones: *Expresiones algebraicas, Monomios, Polinomios y Pequeño Taller.* En la 1ª sección *Expresiones algebraicas*, nos aparece una pequeña introducción teórica del significado de expresiones algebraicas y tres ejemplos sencillos de expresiones algebraicas usadas en la vida real. En la 2ª sección *Monomios*, nos aparece ejemplos y explicaciones teóricas de conceptos referidos a los monomios como monomios semejantes, monomios opuestos y las operaciones básicas con monomios (suma, resta, multiplicación y división) En la 3ª sección *Polinomios*, nos aparece la definición de polinomio y se nos explica en un ejemplo la suma de polinomios. En la 4ª y última sección *Pequeño Taller*, nuestros alumnos podrán afianzar los procedimientos aprendidos para la realización de sumas de polinomios

Generador de Ecuaciones de 2º Grado

En esta aplicación informática, podemos trabajar ampliamente la resolución de ecuaciones de 2ª grado a niveles de 2º y 3º de ESO. Está dividida en 3 secciones: *Ecuación de 2º grado: Resolución, Número de soluciones de la ecuación de 2º grado* y *Pequeño taller.*

En la 1ª sección *Ecuación de 2º grado: Resolución,* aparece los distintos procedimientos a realizar para resolver una ecuación de 2º grado dependiendo de si es completa o incompleta (y dentro de este caso, las dos posibles variantes cuando falta el término independiente o cuando falta el término en x). En la 2º sección *Número de soluciones de la ecuación de 2º grado*, se nos explica de una manera teórica que en la ecuación de 2º grado completa, en función del valor del discriminante, puede haber dos, una o ninguna solución.

En la 3ª y última sección *Pequeño taller*, los alumnos pueden consolidar los procedimientos aprendidos en la resolución de ecuaciones de 2º grado mediante la gran cantidad de ecuaciones a resolver que la aplicación nos proporciona.

Webquest ecuaciones

Una Webquest consiste en investigación guiada, con recursos principalmente de Internet, que obliga a la utilización de habilidades cognitivas elevadas, prevé el trabajo cooperativo y la autonomía de los alumnos e incluye una evaluación auténtica.

Entre todas las Webquest sobre la enseñanza del Álgebra yo he seleccionado la siguiente:

Ecuaciones: el reto de encontrar una solución a un problema

La webquest se encuentra en la siguiente dirección:

Http://ciudad.latinol.com/paloma2006/

Esta webquest está enfocada a introducir el concepto de ecuaciones de primer grado y su resolución en los alumnos del 7mo grado de EGB3.

Estas son algunas de las actividades que plantea la webquest

- 1º - Vamos a organizar el grupo en subgrupos de cuatro alumnos, de forma heterogénea, de forma que en cada grupo haya alumnos con dificultades en comprender los conceptos matemáticos y alumnos que no, alumnos con soltura en el manejo del ordenador y alumnos que no, etc.

- 2º - En cada grupo habrá:

- un mago.- será el encargado de dirigir todo el proceso, organizar el trabajo etc.

- un ayudante de mago.- será el encargado de ayudar al mago.

- un investigador.- será el encargado de buscar información utilizando los recursos.

- un ayudante del investigador.- será el encargado de ayudar al investigador en su búsqueda.

A pesar de estos perfiles, todos deben colaborar y comprender que trabajar en equipo es difícil pero merece la pena porque se multiplicarán las buenas ideas, los resultados positivos, los conceptos comprendidos y también los buenos ratos, claro.

- 3º - Debes realizar las siguientes actividades:

- **Actividad 1**.- *Toma de contacto*: Leed detenidamente la introducción de esta WebQuest. Ponlo en práctica, es decir, el mago y su ayudante ordenarán los cálculos al investigador y su ayudante. Los investigadores pueden utilizar la calculadora del ordenador para sus cálculos. Debéis hacerlo varias veces y verificar que siempre se cumple.

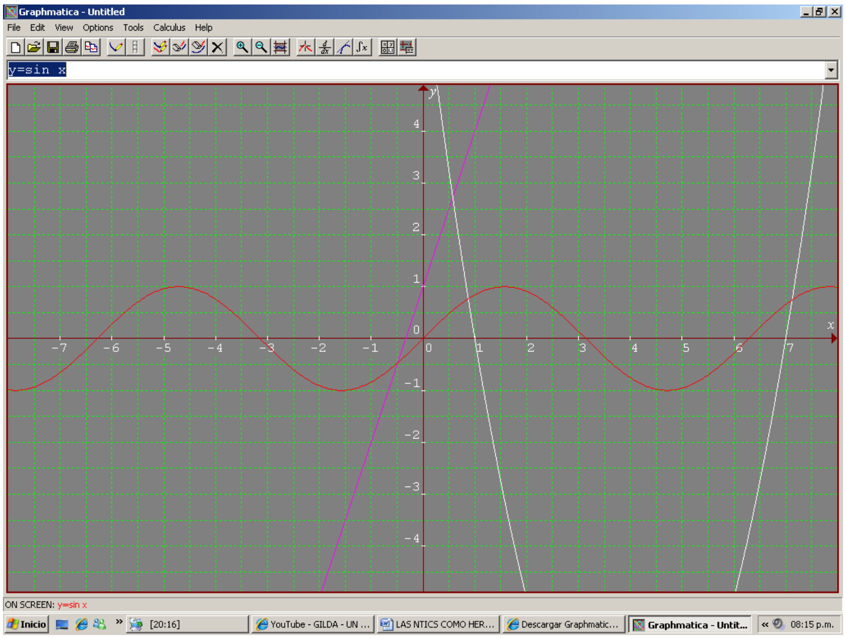
¿Sorprendente?

Recursos.- La calculadora del ordenador. Se encuentra en:

Inicio/Todos los Programas/Accesorios/Calculadora

GRAPHMATICA

Este es un software hecho a medida, ya que se utiliza para graficar diferentes funciones en dos dimensiones. Como así también se puede calcular integrales, estimar resultados, analizar las intersecciones de dos curvas, etc.



En definitiva es un potente graficador que lo podemos utilizar como herramienta para la enseñanza de límite, dominio de funciones, imágenes, etc.

PROPUESTAS PARA LA ENSEÑANZA DEL ALGEBRA

En este capítulo se dará a conocer posibles propuestas de enseñanza para la iniciación del algebra, no siendo estas determinantes, dependerá del lector si tomarlas o no.

PROPUESTAS PARA LA INICIACION EN EL ALGEBRA

Las actividades que siguen pretenden ejemplificar un intento de solución a algunos de los problemas anteriormente expuestos. Para ello, se ha tenido en cuenta tres características: en primer lugar, han sido diseñadas a partir de algún contexto real o familiar del alumno, después se ha adoptado el punto de vista geométrico y por último desde el punto de vista algebraico más amplio posible, aquel que pone en relación significado, variabilidad y transformaciones.

PRIMERA PROPUESTA

Esta primera propuesta la lleve a cabo en un curso del octavo año sexta división en el año anterior.

PRIMER ENCUENTRO

OBJETIVOS

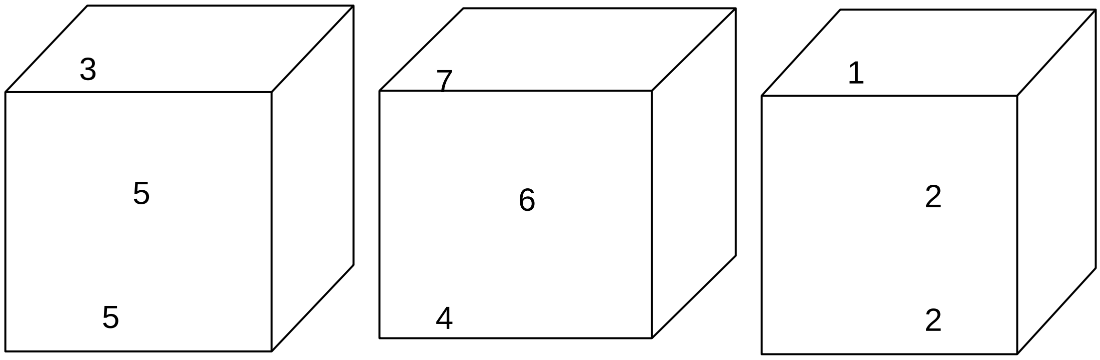
Que el alumno logre:

- Conocer a través de diferentes contextos una expresión algebraica
- Relacionar las expresiones algebraicas con el contexto matemático y cotidiano
- Valor los conocimientos adquiridos en clases.

En la primera clase, a partir del diagnóstico que se realizó se les presentó la siguiente actividad a partir de un problema del contexto real.

María Julia tiene tres cajas con distintos elementos en cada caja, y desea agrupar todos los elementos en una sola caja.

Primero hemos resuelto llamar a las manzanas con la letra “m”, a los cuadernos con la letra “c”, a las pilas con “p”, las reglas con “r”



CAJA A CAJA B CAJA C

Caja A: 5 manzanas, tres cuadernos, cinco pilas

Caja B: 7 cuadernos, 6 manzanas y 4 reglas

Caja C: una manzana, dos cuadernos, 2 pilas

Queremos juntar todos los elementos en una sola Caja D ¿Cuántos elementos de cada tipo tendrá la caja D?

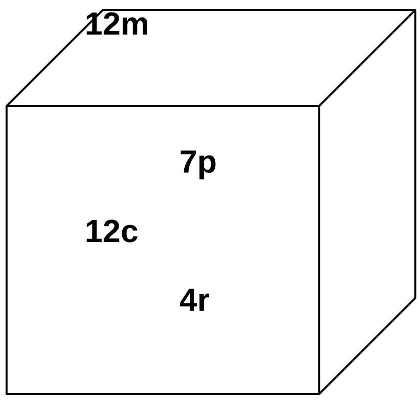
Entonces los alumnos recurrirán a la suma de cada caja

5m + 3c + 5p + 7c + 6m + 4r + 1m + 2c + 2p + 12m + 7p + 12c + 4r

Si el docente les pregunta a los alumnos cuantas manzanas ha en la caja ellos responderán 12 manzanas porque cuentan las manzanas que hay en la caja, también responderán que tienen siete pilas, doce cuadernos y cuatro reglas. Les preguntará ¿qué operación hicieron?, ellos responderán que sumaron las “m” con las “m”, las “p” con las “p”, las “c” con las “c” y las “r” con las “r”.

Se preguntará si puedo sumar las “m” con las “p”, y ellos contestarán que no porque son distintas.

Entonces la expresión resultante será: **12m, 7p, 12c, 4r.** Si tenemos que sumar los elementos de la caja D como quedaría la expresión: **12m + 7p + 12c + 4r.**



Caja D

El docente explica a los alumnos que lo que escribieron se llama *Expresiones Algebraicas* y que es más corta que la anterior porque operamos sobre ella con las sumas se fueron simplificando o sea hasta llegar a una expresión más simple y que es equivalente a la anterior y además porque está compuesta por una parte numérica y una parte literal (letra).

Luego si a la suma de los elementos de la Caja D le quitamos dos manzanas y una regla de dicha caja. ¿Cómo quedaría la suma de los elementos de la caja D?

Con esta actividad se introduce la otra operación que es la sustracción o resta.

12m + 7p + 12c + 4r -2m – 1r.

10m + 7p + 12c + 3r

A continuación se les dará las siguientes expresiones para que operen y puedan encontrar una expresión más simple.

Encuentra una expresión más simple:

1) 4a + 3m – 1a + 7a – 2m
2) 3b + 2c – 2b + 5c + 2r – 7c + c.

La primera clase siempre es muy importante porque los alumnos lograrán comprender el significado de las letras como etiqueta, incluso los alumnos pusieron su propio significado a las letras, como ser nombre de frutas, muebles, carpetas, etc. y además lograrán encontrar expresiones más sencillas al operarlas las mismas.

SEGUNDA CLASE

OBJETIVOS

Que el alumno logre:

- ❖ Afianzar los contenidos trabajados en el encuentro anterior.
- ❖ Reconocer y operar convenientemente sobre las expresiones algebraicas.
- ❖ Valore los conocimientos adquiridos en clases.

En la segunda clase será de carácter práctica en donde los alumnos se ejercitarán sobre transformación o reducción de expresión en donde se les dará los siguientes ejercicios:

1) 10a + 3b – 2b + 5a

2) -4x + 2a + 7x – 5a

3) 3c + 2y – c + 5y + 2a

4) $\frac{1}{2}a + \frac{3}{4}a - a + b - \frac{3}{5}b$

5) 3x + $\frac{1}{2}y + \frac{2}{5}x - x + 2y$

6) 5a - $\frac{1}{2}m + 3m - \frac{1}{3}a$

7) 3a - $\frac{3}{4}z + 0.2a + 3z$

8) 3.a.a.a

9) $5.a^2.a^5$

10) $a.a.a.^2 + 3.n^2.n^3 + 2a^4 \; -7n^5$

En la segunda clase los alumnos lograrán afianzar el procedimiento para sumar y restar, pero además se incorporaron otros números como son los racionales y los decimales de tal manera que pueda ampliar su campo de resolución. La variable didáctica en esta clase fue la utilización de diferentes campos numéricos.

TERCERA CLASE

OBJETIVOS

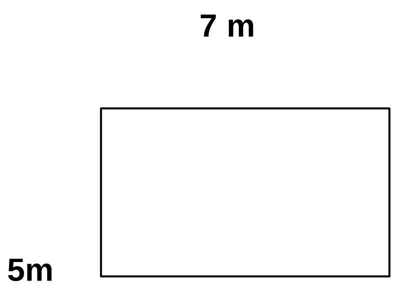
Que el alumno logre:

- Asociar las expresiones algebraicas al contexto geométrico.
- Reconocer y operar convenientemente sobre las expresione
- Conocer y aplicar el concepto de variabilidad.
- Valore los conocimientos adquiridos en clases.

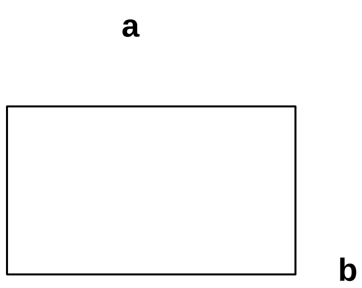
Se comienza con la siguiente actividad:

Tenemos los siguientes rectángulos, sabiendo que el perímetro es la suma de todos sus lados, calcular su perímetro en cada uno de los rectángulos:

Rectángulo A



Rectángulo B



En el primer rectángulo A los alumnos calcularán la suma de los lados del rectángulo:

$$5 + 7 + 5 + 7 = 24m$$

En el segundo rectángulo B los alumnos escribirán la siguiente expresión:

$$a + b + a + b =$$
$$2a + 2b$$

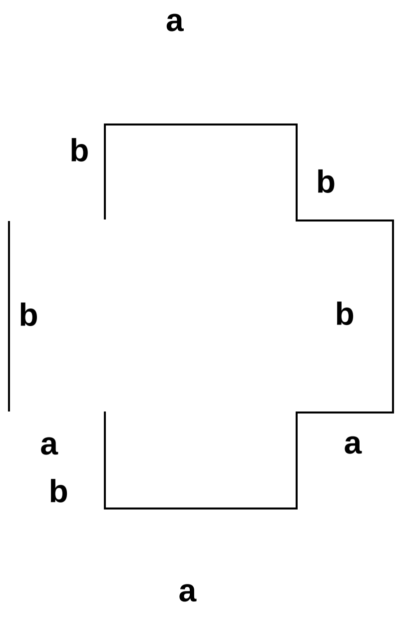
Para llegar a la expresión anterior se les pedirán que hallen otra expresión más simple a la escrita.

Luego se les presentará diferentes figuras en donde se les pedirá que calculen el perímetro de la figura:

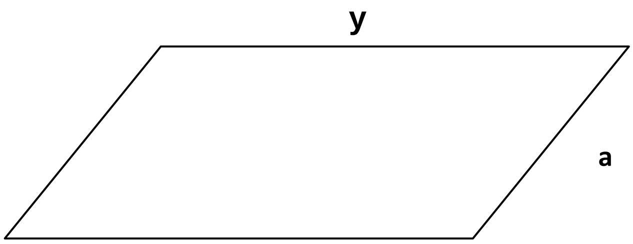
ACTIVIDAD 1

HALLAR LA EXPRESIÓN DEL PERIMETRO DE LAS SIGUIENTES FIGURAS

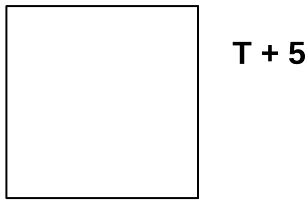
a)



b)

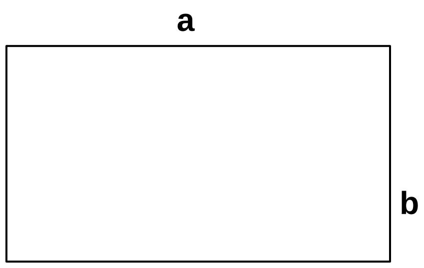


c)



ACTIVIDAD 2

Dada la siguiente figura:



A partir de la expresión encontrada en la clase de la expresión perimetral del rectángulo:

2A + 2B

Si a = 9 y b = 6. ¿Cuál sería el perímetro del rectángulo?. ¿Qué operación realizaste?

Los alumnos reemplazarán los valores en la expresión que quedará de la siguiente forma:

2.9 + 2.6 = 18 + 12 = 30

A partir de esta actividad se les dará otros valores para a y b para que calculen el perímetro

SEGUNDA PROPUESTA

Esta segundo propuesta la lleve a cabo este año en el mismo curso de octavo año sexta división, donde trabaje con los problemas de los PCA de Gascons. Este es el análisis de cada una de las actividades del primer PCA trabajado en la clase.

PCA 1 PROGRAMAS DE CALCULO ARITMETICO PARA SER DICTADO

Actividad 1: Es una situación en donde los contenidos involucrados son números naturales y sus operaciones ya que tendrá que multiplicar por 4, sumarle el número pensado 5 unidades, luego multiplicar el resultado por nueve y por último dividirlo por 3, en donde el alumno lo puede resolver mentalmente o por medio de papel y lápiz, el docente solo se limita al dictado esperando a que los alumnos comuniquen el resultado. En esta actividad el objetivo es que el alumno pueda operar la suma, la multiplicación y la división con números naturales, como así también entrenar el cálculo mental o escrito. El alumno pondrá en juego sus conocimientos sobre operaciones aritméticas y su cálculo. Los alumnos tendrán que tener como conocimiento previo el reconocimiento de los signos operacionales y el algoritmo de las operaciones, seguramente aparecerá como problema la operación de la multiplicación, sobre todo por 9 ya que en el diagnóstico que se realizó en las clases anteriores tuvieron dificultades con las multiplicaciones y divisiones. Los alumnos tendrán que usar la técnica del cálculo escrito y/o mental. Cuando el alumno multiplica, suma, multiplica por 9 y divide por 3 permite en el alumno afianzar el cálculo de las operaciones matemáticas, para llevar a cabo la resolución de esta actividad los alumnos utilizaron el cuaderno y el lápiz.

Docente: ¿porque les da distintos resultados?

Alumnos: no contestan

Docente: ¿Por qué les da distintos resultados?

Alumno: Porque el eligió un número distinto al mío

Docente: Siempre que elijan diferentes números el resultado será distinto.

Docente: ¿Qué operación les costó más resolver?

Alumno: La multiplicación por 9.

Docente: ¿Por qué?

Alumno: Porque no se la tabla.

Alumno2: Me costó más la división

Docente: ¿Qué paso con la división? ¿Cuál es el resto de su división?

Alumno: el resto es 0.

Docente: ¿A todos les dio resto cero?

Alumnos: Siiiii.

Docente: ¿el número que nos dio como resultado de la división? ¿a qué conjunto numérico pertenece?

Alumno: a los números naturales.

Con esta actividad se pretende que el alumno cuando realiza el cálculo de las operaciones recuerde las mismas, como son la suma, multiplicación y división. Cuando divide por 3 permite al docente recalcarle al alumno que cualquier número que piensen siempre les dará como resultado un número entero.

Actividad 2: Es la misma situación del punto anterior, en donde el alumno realizaría las operaciones con los números naturales, pero en este caso cambiando el orden de las operaciones, con esto se quiere hacerle ver a los alumnos que utilizando los mismos números y las mismas operaciones pero cambiando el orden en las operaciones el resultado no es el mismo. Los alumnos observaron que el resultado no les da el mismo resultado del punto anterior, el cambiar el orden de los números y no cambiando el operador +,*, /, cambia el resultado en la operación. Lo que se puede anticipar de la situación es cuando se va a dividir por 3 no a todos les dará un número entero. Los contenidos involucrados son operaciones con números naturales, se pretende con esta actividad reforzar el cálculo mental y numérico en el alumno. El docente es un guía en esta actividad realizando también pregunta como ¿dará el mismo resultado que en el punto anterior? Se pretende afianzar el cálculo de operaciones numéricas cuando los alumnos están frente a las operaciones y la técnica utilizada por los alumnos para resolver la situación, en su mayoría realizan las operaciones con papel y lápiz en forma vertical algunos que son muy pocos lo hicieron en forma mental, se observó que algunos alumnos tuvieron dificultades al realizar la división por 3 y esto se debió por falta de conocimientos anteriores ya que este es un inconveniente que tuvieron en el diagnostico la división con resultados decimales. Pensaron por ejemplo:

Piensa un número: 2 le sumaron 5 = 7 y ese número lo tenían que dividir por 3 y ahí surgió el problema para el alumno ya que el resultado no le daba un número "exacto" y surgió el obstáculo para poder continuar con los siguientes cálculos de la operación. Se entiende por obstáculo según Brousseau "como una concepción que ha sido en principio eficiente para resolver algún tipo de problemas pero que falla cuando se aplica a otro. Debido a su éxito previo se resiste a ser modificado o a ser rechazado: viene a ser una barrera para un aprendizaje posterior. Se revela por medio de los errores específicos que son constantes y resistentes. Para superar tales obstáculos se precisan situaciones didácticas diseñadas para hacer a los alumnos conscientes de la necesidad de cambiar sus concepciones y para ayudarlos a conseguirlo."

Existen ciertas características en un obstáculo:

- un obstáculo es un conocimiento, no una falta de conocimiento;
- el alumno utiliza este conocimiento para producir respuestas adaptadas en un cierto contexto que encuentra con frecuencia

Inmediatamente el alumno borró el número y pensó en otro sin que el docente les diga que cambie el número, el análisis de esta situación nos lleva a pensar que el alumno cuando observa que la división no les da un resto cero entonces abandonan la situación porque el alumno rechaza automáticamente la situación de encontrarse con un resultado que no sea un número natural, el docente indagó la situación y les preguntó porque no siguió dividiendo y el alumno respondió que no sabía como seguir después de la división para multiplicarlo por 7 ya que el resto les daba distinto de cero, el alumno decía que el resto le sobraba y que no sabía como seguir, haciendo una reflexión pienso que el alumno no se encontraba capaz de operar en otro campo numérico por la falta de trabajo en dicho campo numérico en los años anteriores. Luego se pidió a los alumnos que expresen en el pizarrón los resultados de sus operaciones, por lo cual a continuación se les pidió que pase un alumno al pizarrón para que formule frente a sus compañeros el procedimiento que utilizó para llegar al resultado. Al final de la clase se preguntó a los alumnos si tuvieron dificultad para dividir por 3 porque antes de iniciar la clase sabía que podría haber una dificultad en el alumno la división por 3 porque no le daría un número natural siempre, casi la mitad de la clase me respondió que tuvo dificultad, se les preguntó como resolvieron esa dificultad, contestando en su mayoría que eligieron otro número, muy pocos solamente dos personas no cambiaron el número, dividieron por 3 y siguieron realizando la operación. Pedí a uno de ellos que pasara al pizarrón y escriba como realizo el procedimiento para llegar al resultado, preguntando a los alumnos que clase de número es el resultado de la operación que realizó el alumno, no me contestaron, un alumno dijo que era un número que tenía coma, entonces les pregunté a los alumnos en que parte de la ciudad observan estos números, a los cuales uno me contestó que lo observó en el supermercado, otro me contestó en la balanza de la farmacia, entonces vieron que el resultado de este alumno no era el mismo que la mayoría de los otros resultados, no solo en el valor del número sino también porque tenía coma. Como docente les dije que no siempre les va a dar un número natural el resultado, podría llegar a darse que de otro número, como ser este número que se llama número decimal. Esta actividad resulto interesante por lo interesante de dividir por 3 con la aparición de las fracciones. El docente interviene en esta situación haciéndole ver al alumno que si el resto no es cero, entonces representemos esa división como fracción:

Docente: ¿Quién no puede dividir por 3?

Alumno: a mí me dio al sumarle 5 el número 7 y no puedo dividir por 3.

Docente: ¿Entonces ese número como lo podemos representar en fracción esa operación? Silencio.

Docente: si es una división lo podemos representar como $\frac{7}{3}$

ustedes, conocen este número y saben operar con este número. Ahora lo multiplican por 4 que ya saben hacerlo.

Docente: ¿quienes pensaron en el mismo número que la actividad anterior?

Docente: bien ya encontraron los resultados. Observen en las operaciones y los números que utilizamos en esta actividad y comparen con la primera actividad. ¿Son iguales los números y las operaciones?.

Alumnos: si

Docente: si son los mismos números y las mismas operaciones. ¿Por qué nos dio diferentes resultados?. Silencio.

Docente: al cambiar el orden de las operaciones que pasa con el resultado cambia o no cambia.

Alumno: cambia el resultado. ¿Siempre?

Alumno 2: parece que si porque a mí me dio otro resultado también utilizando otro número.

Docente: parecería que siempre que cambiamos el orden de las operaciones cambiaría el resultado de las operaciones.

Docente: pregunta. Si sumo o multiplico un número natural con otro número natural ¿obtengo como resultado siempre otro número natural?

Alumno: si

Docente: si pertenece al mismo conjunto el resultado se llama propiedad de ley de cierre.

Docente: si divido un número natural con otro número natural. ¿Obtengo otro número natural?

Alumno: no porque a mí me sobró en el resto.

Docente: entonces no siempre al dividir dos números naturales voy a obtener otro número natural. POR LO TANTO LA DIVISIÓN NO CUMPLE CON LA LEY DE CIERRE. ¿En la resta se cumplirá la ley de cierre?

Alumno: piensan, realizan cálculos en su carpeta, y a algunos les dio un número negativo. Por lo cual es un número entero,

Docente: ¿es un número natural el número negativo? ¿Entonces que podemos concluir?

Alumno: que la resta no cumple con la ley de cierre.

Lo interesante de esta situación es que aparece otro campo numérico, preguntándoles a los alumnos que veían de diferente con la actividad 1, y me respondieron que en la división aparecía otro tipo de número como las fracciones, y que el resultado cambia porque es un número fraccionario. Con esta situación de dividir por 3 los alumnos aprendieron a representar una división en forma de fracción cuando el resto no les daba cero.

Con esta actividad el alumno evolucionará en el campo de los conjuntos numéricos ya que trabajará con otro conjunto numérico como lo es el de las fracciones y también que el cambiar el orden de las operaciones también cambia el resultado de la actividad, otra tema interesante es la propiedad de cierre de las operaciones al dividir dos números naturales el alumno observó que no siempre obtendrá otro número natural, como pasó al dividir por tres.

Actividad 3: En este punto también el alumno juega con el cálculo operacional en los números naturales y en los racionales al dividir por ocho, en la actividad entra en juego el cálculo escrito o mental en el alumno, el docente es un observador esperando que los alumnos comuniquen su respuesta. En esta actividad a diferencia de la anterior, la división es la última operación que realiza el alumno ya que en la anterior actividad era la segunda operación que realizaba y algunos podían cambiar el número que habían pensado de tal forma que la división les de un número con resto cero, pero en esta actividad es la última operación la división y como que no pueden volver a pensar otro número y realizar nuevamente los cálculos, por lo tanto se ven en la necesidad de expresar el resultado como fracción al realizar la división por ocho.

Actividad 4: En esta actividad la división es la primera operación que realiza el alumno, dándole la posibilidad de cambiar el número si le sobra en el resto, pero esta división tiene una particularidad que se divide por un número de 2 cifras como lo es el número 15, y al principio les costó dividir por 15 ya que en la escuela primaria por el diagnóstico realizado no lograron afianzar la división por dos cifras, entonces el docente interviene de la forma de explicar como es el procedimiento de la división por dos cifras realizando un ejemplo en el pizarrón, en esta actividad se pretende trabajar con las operaciones de división, multiplicación, suma y por primera vez entra en juego la resta que sería la última operación ya que debe restarle dieciocho. o sea entra en juego las operaciones con números, suma, resta, multiplicación y división por dos cifras, cambia el orden de las operaciones y de los valores numéricos, el rol docente es de observador, el alumno lo resolverá en forma mental o por escrito.

Actividad 5: En esta actividad los alumnos aprendieron a realizar operaciones con números más grandes ya que el alumno trabaja con cantidades mayores a 100, salvo la división por una cifra, las operaciones involucradas son suma, resta que la realiza en dos oportunidades consecutivas y por último la división.

Actividad 6: El punto 6 es una actividad muy buena en donde los alumnos aprendieron a trabajar con la necesidad de poner paréntesis cuando tenían que sumar 18 y restarle 7 multiplicarlo por 5, para ver la prioridad de las operaciones y vea la utilidad de los mismos. Los contenidos involucrados en la actividad son operaciones con suma, resta, multiplicación, división por dos cifras. Los alumnos tendrán que saber operar con números naturales y racionales ya que en la última operación el resultado lo expresaron la mayoría en fracción y algunos con decimales además de expresarlo en fracción.

Actividad 7: Actividad en donde los contenidos involucrados son: suma, resta, multiplicación y división de números naturales. El objetivo de esta actividad es que el alumno pueda operar con números múltiplos de 10. Pero también tiene mucho que ver el utilizar los números pares o impares, ya que algunos pensaban en un número impar y luego de sumarle 2000 en la siguiente operación que era la división, observaban que no les daba el resto cero, entonces automáticamente cambiaron el número por otro número que sea par. El docente intervino preguntándole que pasaba si pensaban en un número impar, ellos contestaron que la división no daría un resultado con número natural, que esto cambiaría si pensaban en un número par. Otros sin embargo lo expresaron en fracción realizando por último la resta por 200 y la multiplicación por 20. El alumno lo resolverá utilizando papel y lápiz. El alumno escribirá en el papel el algoritmo de las diferentes operaciones.

Actividad 8: En esta actividad aparece el lenguaje coloquial cuando se menciona “súmale el consecutivo”. Los contenidos involucrados en esta actividad son: suma al sumar el consecutivo, la resta al restar el número 9, multiplicación por 4 y por 3, de números naturales, y lo distinto a las actividades anteriores es que aparece aquí la frase “*súmale el consecutivo”*, en donde los alumnos en su mayoría preguntaron que significa la palabra *consecutivo.* Se recurrió a la biblioteca a buscar un diccionario encontrando la definición de la palabra ***consecutivo***: que sigue a continuación del otro. Entonces con esa definición los alumnos pudieron seguir resolviendo la actividad que es similar a las anteriores porque trabaja con las operaciones en números naturales. Los alumnos lo resolvieron la mayoría en papel y lápiz, algunos mentalmente.

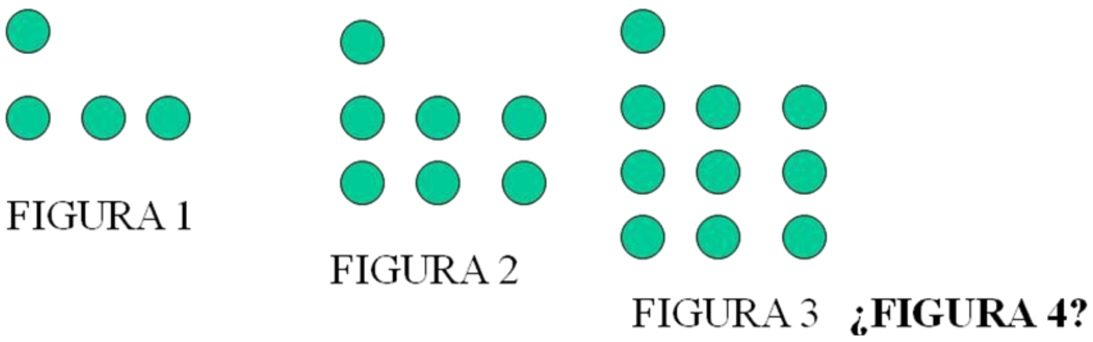
Actividad 9: En esta actividad los contenidos involucrados son operaciones con números, la el lenguaje coloquial cuando tienen que sumarle el doble del número pensado, curiosamente ninguno de los alumnos lo planteó en forma algebraica sino en forma numérica, observaron los alumnos que a todos les daba el mismo resultado 75 ya que al sumarle el doble, al dividirlo por 3 obtenían el mismo número que habían pensado y al restarle el mismo número se anulaba la operación dándole como resultado cero. Los alumnos lo resolvieron en papel y lápiz. Los contenidos involucrados son: operaciones con números naturales, lenguaje coloquial, simplificación. El objetivo de esta actividad es que el alumno comience a trabajar con la noción de doble, y de poder simplificar expresiones al restar por el mismo número, Esta etapa de algebrización se debe traducir la f*ormulación retórica* del PCA a una *formulación escrita o* simbólica de dicho PCA, que es una *expresión algebraica*

$$(nro + 2nro)/3 – nro + 75$$

TERCERA PROPUESTA

DE LO PARTICULAR A LO GENERAL

Dada las siguientes figuras:



1) Dibuja la figura 4 y 7.

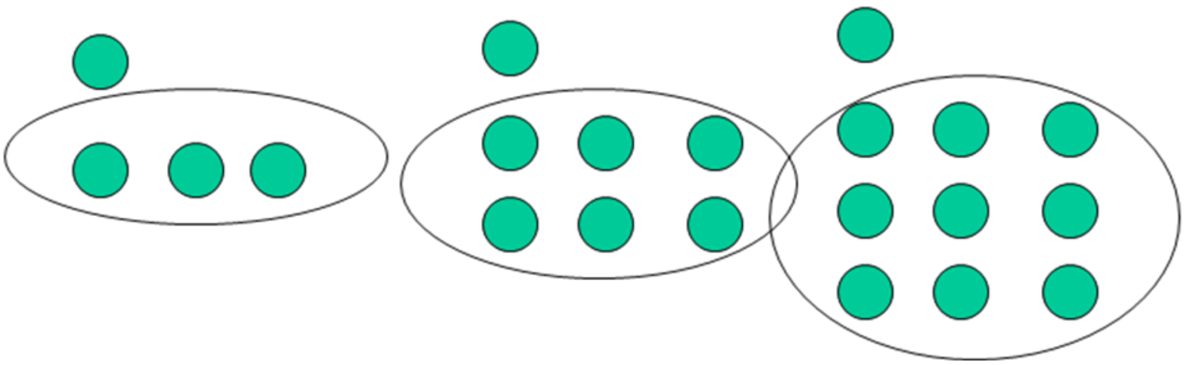
2) ¿Cuántos círculos tendrán las figuras 4 y 7?

3) ¿Qué tienen de parecido las figuras? ¿Qué tienen diferente? Escribe con tus propias palabras.

4) ¿Cuántos puntos más tiene cada figura con respecto a la anterior?

5) ¿y la figura 12 cuantos círculos tendrá?

SI AGRUPAMOS LA FIGURA 1 EN, LA 2 EN 6 Y LA 3 EN 9:



¿LOS CONJUNTOS AGRUPADOS SON MULTIPLOS DE 3?

Cada figura aumenta de a 3. ¿Por qué número vamos a multiplicar al número de figura?

¿Se obtiene el número de puntos de cada figura multiplicando el número de figura por 3? ¿Qué pasó? ¿Falta algún punto? ¿Cuántos? ¿Qué operación harías?3 x número de figura + 1

PROPUESTA 4

DADO LOS SIGUIENTES CONJUNTOS DE 10 NÚMEROS, HALLA EL RESULTADO DE LA SUMA DE CADA UNO DE ELLOS

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56

783, 784, 785, 786, 787, 788, 789, 790, 791, 792

¿Puedes hallar o escribir una expresión que te permita calcular el resultado de la suma de 10 números cualesquiera?

CONCLUSION

Llegando al final del trabajo pude darme cuenta lo importante que es abordar una temática e ir masticándolo en el proceso, quedaron muchas cosas por analizar pero eso será para otra oportunidad. El álgebra forma parte de las matemáticas y está en nosotros docentes poder emplearla oportunamente como una herramienta para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Las nuevas corrientes de la enseñanza del álgebra abren nuevas perspectivas en cuanto la comprensión en el alumno, a través de las figuras, los números. Opino que estas actividades son adecuadas para inicializar al alumno en el estudio de las letras o del álgebra. Otra propuesta sería **iniciar al alumno en la construcción de la noción de función teniendo en cuenta la definición procedimental.**

Espero que este material sea de gran ayuda para los lectores y que podamos juntos seguir explorando el fantástico mundo de las matemáticas y en particular del lenguaje algebraico.

BIBLIOGRAFIA

- Cabero, J (1994). *Nuevas Tic para la Educación*. Sevilla: Alfar
- Iniciación al estudio del algebra. Editorial El Zorzal. Carmen Sessa.
- ·Ariza, J (2002). *TIC aplicadas a la educación*. Málaga: Aljibe
- ·NTCM (2003). Principios y estándares para la educación Matemática. Reston, VA:
- NTCM (Traducción y Edición de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática “Thales”)
- Socas, Camacho, Palarea y Hernández (1989). Iniciación al álgebra. Editorial Síntesis.
- Grupo Azarquiel (1993). Ideas y actividades para enseñar álgebra. Editorial Síntesis
- Vergnaud, G. Tiempo largo y tiempo corto en el aprendizaje del álgebra.
- Freudenthal, H. (1983). Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.
- Artigue M., Douady, R., Moreno, L., Gómez, P. (1995). Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. Una Empresa Docente. Grupo Editorial Iberoamericana.
- Matemática 7, 8 y 9 Santillana. Editorial Santillana. 2005.
- Algebra. Repetto Linskens y Fesquet.